Уравнения и неравенства с параметрами

Работу выполнила ученица 10 класса ГОУ СОШ № 448
Бастрыгина Кристина
Руководитель: Кноп Л. С.

Содержание.

Введение……
1. **Линейные уравнения и уравнения, приводимые к линейным**……..
2. **Линейные неравенства и неравенства, приводимые к линейным**……
3. **Квадратные уравнения и уравнения, приводимые к квадратным**……
4. **Квадратные неравенства**……
5. **Иррациональные уравнения**…….
6. **Иррациональные неравенства**……..
7. **Показательные и логарифмические уравнения**……
8. **Показательные и логарифмические неравенства**…….

Список литературы…….

Введение.

Основное содержание моей работы составляют методы решения задач, содержащих параметры. Эта тема представляет для меня особый интерес, так как подобные задачи встречаются на ЕГЭ и на вступительных экзаменах в ВУЗы. В школьном курсе математики эти задачи рассматривают крайне редко и бессистемно.

Трудности решения заданий с параметрами вызваны прежде всего тем, что в любом случае, даже при решении простейших уравнений и неравенств, содержащих параметры, приходится производить ветвление всех значений параметров на отдельные классы, при каждом из которых задача имеет решение. При этом следует четко и последовательно следить за сохранением равносильности решаемых уравнений или неравенств с учетом области определения выражений, входящих в уравнение или неравенство, а также учитывать выполнимость производимых операций.

Моя работа содержит 8 разделов, к каждому из которых приведены примеры решений. Первый раздел посвящается рассмотрению ***линейных*** уравнений и неравенств, а также уравнений и неравенств, приводимых к линейным.

Во втором, основном разделе рассматриваются ***квадратные*** уравнения и неравенства, а также уравнения и неравенства, приводимые к квадратным. Здесь разобран как аналитический, так и графический способ решения. Особое внимание уделено решению задач, в которых решения должны удовлетворять каким-либо дополнительным условиям.

Далее представлены ***иррациональные, показательные и логарифмические*** уравнения и неравенства.

В работе приведены полные решения всех рассматриваемых мною задач.

Линейные уравнения и уравнения, приводимые к линейным.

Уравнение вида $Ax-B=o$, где A и B – выражения, зависящие только от параметров, а x – неизвестное, называется **линейным уравнение относительно *x*.**

Она приводится к виду $Ax=B$ и при $A \neq 0$ имеет единственное решение $x = \frac{B}{A}$ при каждой системе допустимых значений параметров.

При $A = 0$ и $B = 0$ x - любое число, при $A = 0$ и $B \neq 0$ решений нет.

Пример № 1:

$$(a^2 - 1)x - (2a^2 + a - 3) = 0$$

или

$$(a^2 - 1)x = (2a^2 + a - 3)$$

является линейным относительно x. Оно имеет смысл при любых действительных значениях параметра a.

Приведя его к виду $(a - 1)(a + 1)x = (2a + 3)(a - 1)$, заметим, что при $a = 1$ оно принимает вид: $0x = 0$, т.е. решением его служит любое действительное число. При $a = -1$ уравнение имеет вид: $0x = 2$, т.е. не имеет решения.

При $a \neq \pm 1$ уравнение имеет единственное решение

$$x = \frac{2a+3}{a+1}.$$

Рассмотрим некоторое уравнение, приведем его к линейному.

Пример № 2: Решить относительно x:

$$\frac{3mx-5}{(m-1)(x+3)} + \frac{3m-11}{m-1} = \frac{2x+7}{x+3}.$$

По смыслу задачи $(m - 1)(x + 3) \neq 0$, т.е. $m \neq 1$, $x \neq -3$.

Умножив обе части уравнения на $(m - 1)(x + 3) \neq 0$, получим уравнение

$$(4m - 9)x = 31 - 2m$$

Отсюда при $m \neq 2{,}25$ $x = \frac{31-2m}{4m-9}$.

Теперь необходимо проверить, нет ли таких значений m, при которых найденное значение x равно -3.

$$\frac{31-2m}{4m-9} = -3.$$

При $m= -0{,}4$

Таким образом, при $m \neq 1$, $m\neq 2{,}25$, $m \neq - 0{,}4$ уравнение имеет единственное решение

$$x = \frac{31 - 2m}{4m - 9}.$$

При $m = 2,25$ и при $m = -0,4$ решений нет, при $m = 1$ уравнение не имеет смысла.

Линейные неравенства и неравенства, приводимые к линейным.

Каждое из неравенств вида $Ax > B$, $Ax < B$, $Ax \geq B$ или $Ax \leq B$, где A и B – действительные числа или функции от параметров, а x –действительная переменная величина, называется **линейным неравенством с одним неизвестным** (x).

Например, неравенство (m – 1)x < 5m – линейное относительно x. При m = 1 x – любое число, при m > 1 x < $\frac{5m}{m-1}$, при m < 1 x > $\frac{5m}{m-1}$.

Пример № 3:

$$\frac{2x-m}{(m-2)(x+3)} - \frac{m}{m-2} < \frac{3}{x+3}$$

По смыслу задачи $m \neq 2$, $x \neq -3$.
Несложные преобразования приводят к неравенству

$$\frac{(m-2)x-(6-7m)}{(m-2)(x+3)} > 0.$$

Затем

$$\frac{x-\frac{6-7m}{m-2}}{x+3} > 0,$$

которое сводится к совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > \frac{6-7m}{m-2} \\ x > -3 \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} x < \frac{6-7m}{m-2} \\ x < -3 \end{cases} \quad (2) \end{array}\right.$$

1) $\frac{6-7m}{m-2} > -3$; $\frac{-4m}{m-2} > 0$; (0;2)

2) $\frac{6-7m}{m-2} < -3$; $(-\infty;0);(2;+\infty)$

Отсюда следует решение неравенства.

При $m < 0$, $m > 2$ $x \in (-\infty;\frac{6-7m}{m-2});(-3;+\infty)$.

При $0 \leq m < 2$ $x \in (-\infty;-3);(\frac{6-7m}{m-2};+\infty)$

При $m = 2$ неравенство не имеет смысла.

Квадратные уравнения и уравнения, приводимые к квадратным.

Уравнение вида $mx^2 + px + q = 0$, где x – неизвестное, m, p, q – выражения, зависящие только от параметров, и $m \neq 0$, называется **квадратным уравнением относительно x.**

Допустимыми будем считать только те значения параметров, при которых m, p, q – действительны.

<u>I. Аналитический способ решения квадратных уравнений.</u>

Пример № 4:

$$mx^2 + 3mx - (m + 2) = 0$$

имеет смысл при любых действительных значениях параметра m.

1) При $m = 0$ оно принимает вид: $0x^2 + 3*0x - 2 = 0$ и не имеет корней.

2) При $m \neq 0$ оно является квадратным.

$$mx^2 + 3mx - (m + 2) = 0$$

$$D=13m^2 + 8m$$

а) Чтобы уравнение имело два корня, дискриминант должен быть больше нуля.

$$13m^2 + 8m > 0$$

$$13m^2 + 8m = 0$$

$$m = 0 \text{ или } m = -\frac{8}{13}$$

Отсюда следует, что

$$x_1 = \frac{-3m + \sqrt{m(13m+8)}}{2m},$$

$$x_2 = \frac{-3m - \sqrt{m(13m+8)}}{2m}$$

при $m < -\frac{8}{13}$ и при $m > 0$.

б) При $m = -\frac{8}{13}$ $D = 0$, уравнение будет иметь один корень

$$x = -\frac{3m}{2m}.$$

в) При $-\frac{8}{13} < m < 0$ $D < 0$, уравнение не имеет корней.

Таким образом, при $-\frac{8}{13} < m \le 0$ уравнение не имеет корней, при $m = -\frac{8}{13}$ уравнение будет иметь один корень:

$$x = -\frac{3m}{2m},$$

при $m < -\frac{8}{13}$ и при $m > 0$ имеет два действительных корня:

$$x_1 = \frac{-3m + \sqrt{m(13m+8)}}{2m},$$

$$x_2 = \frac{-3m - \sqrt{m(13m+8)}}{2m}.$$

Пример № 5:

Найти значение параметра a, при котором уравнение $x^4 - 2x^2 + a + 1 = 0$ имеет 4 корня, которые являются последовательными членами арифметической прогрессии.

Решение: обозначим $x^2 = t$, $t > 0$; $t^2 - 2t + (a + 1) = 0$

$$\frac{D}{4} = 1 - a - 1 = -a\ ;\ -a > 0;\ a < 0$$

$$t_1 = 1 + \sqrt{-a} \qquad t_2 = 1 - \sqrt{-a}$$

Так как $t > 0$, то необходимо $1 - \sqrt{-a} > 0$;

$$\sqrt{-a} < 1; \qquad 0 < -a < 1; \qquad -1 < a < 0$$

Имеем корни исходного уравнения:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{1-\sqrt{-a}} \qquad x_{3,4} = \pm\sqrt{1+\sqrt{-a}}$$

$$-\sqrt{1+\sqrt{-a}} < -\sqrt{1-\sqrt{-a}} < \sqrt{1-\sqrt{-a}} < \sqrt{1+\sqrt{-a}}$$

Т. к. x_n – являются. членами арифметической прогрессии, то

$$-\sqrt{1-\sqrt{-a}} = \frac{-\sqrt{1+\sqrt{-a}} + \sqrt{1-\sqrt{-a}}}{2}$$

$$-2\sqrt{1-\sqrt{-a}} = -\sqrt{1+\sqrt{-a}} + \sqrt{1-\sqrt{-a}}$$

$$\sqrt{1+\sqrt{-a}} = 3\sqrt{1-\sqrt{-a}}\ ;\ 1 + \sqrt{-a} = 9 - 9\sqrt{-a}$$

$$10\sqrt{-a} = 8;\ \sqrt{-a} = \frac{4}{5};\ -a = \frac{16}{25};\ a = -\frac{16}{25}$$

Ответ: при $a = -\dfrac{16}{25}$

<u>II. Графический способ решения квадратных уравнений.</u>

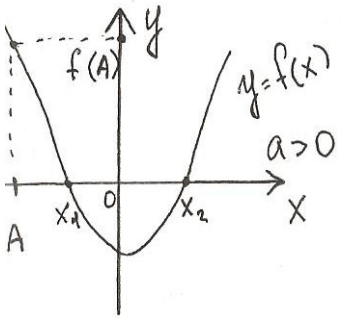
Задача:

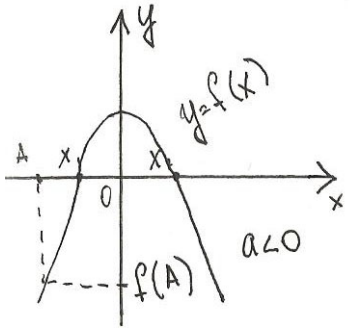
Пусть требуется решить уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где $x_1 < x_2$, А – параметр, относительно которого надо решить задачу.

Исследуем решение этой задачи при условии:

I. $A < x_1 < x_2$;
II. $x_1 < x_2 < A$;
III. $x_1 < A < x_2$.

I.





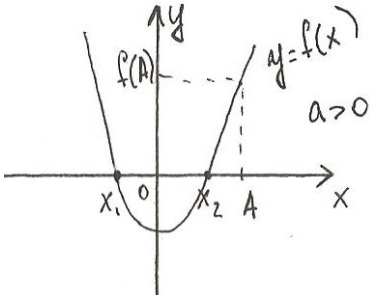
$\left.\begin{array}{l} a > 0 \\ f(A) > 0 \end{array}\right|$ значит $a * f(A) > 0$

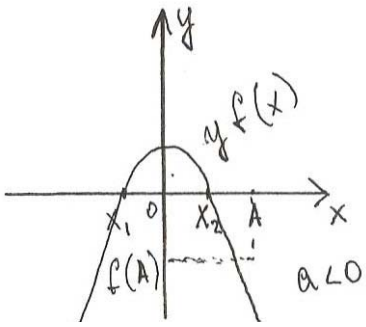
$\left.\begin{array}{l} a < 0 \\ f(A) < 0 \end{array}\right|$ значит $a * f(A) > 0$

$$-\frac{b}{2a} > A$$

Итак, $A < x_1 < x_2$ тогда и только тогда, когда $\begin{cases} a * f(A) > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} > A \end{cases}$

II.



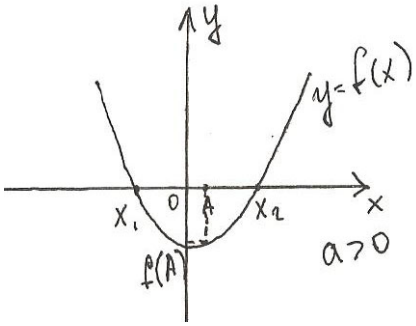


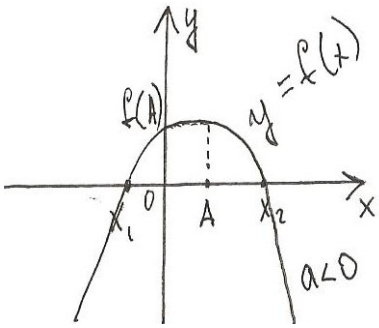
$a * f(A) > 0$ $\qquad\qquad$ $a * f(A) < 0$

$$-\frac{b}{2a} < A$$

Итак, $x_1 < x_2 < A$ тогда и только тогда, когда $\begin{cases} a * f(A) > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} < A \end{cases}$

III.





$a * f(A) < 0$ $\qquad\qquad$ $a * f(A) < 0$

Итак, $x_1 < A < x_2$ тогда и только тогда, когда $a * f(A) < 0$

Ответ: $A < x_1 < x_2$, если $\begin{cases} a * f(A) > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} > A \end{cases}$;

$x_1 < x_2 < A$, если $\begin{cases} a * f(A) > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} < A \end{cases}$;

$x_1 < x_2 < A$, если $\begin{cases} a * f(A) > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} < A \end{cases}$

Пример № 6:

Найти все значения параметра *a,* при котором корни уравнения $x^2 - 2ax - 6 + 5a = 0$ принадлежат промежутку $[-2;7]$

Решение:

$-2 \le x_1 \le x_2 \le 7$ тогда и только тогда, когда $\begin{cases} -2 \le x_1 \le x_2 \\ x_1 \le x_2 \le 7 \end{cases}$ только и только тогда, когда

$$\begin{cases} D \ge 0 \\ 1 * y(-2) \ge 0 \\ \dfrac{2a}{2} \ge -2 \\ 1 * y(7) \ge 0 \\ \dfrac{2a}{2} \le 7 \end{cases} \qquad \begin{aligned} D &= 4a^2 + 24 - 20a \\ y(-2) &= 9a - 2 \\ y(7) &= 43 - 9a \end{aligned} \qquad \begin{cases} 4a^2 - 20a + 24 \ge 0 \\ 9a - 2 \ge 0 \\ -2 \le a \le 7 \\ 43 - 9a \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4a^2 - 20a + 24 \ge 0 \\ a \ge \dfrac{2}{9} \\ -2 \le a \le 7 \\ a \le 4\dfrac{7}{9} \end{cases}$$

Ответ: $\left[\dfrac{2}{9};2\right] \cup \left[3;4\dfrac{7}{9}\right]$

Пример № 7:

Найти все значения параметра *a*, при котором корни уравнения $x^2 - 2(a-1)x + 2a + 1 = 0$ удовлетворяет условию $-4 < x_1 < 0 < x_2 < 4$.

Решение:

$$\begin{cases} x_1 < 0 < x_2 \\ -4 < x_1 < x_2 \\ x_1 < x_2 < 4 \end{cases}$$

Обозначим любое число $= f(x)$

$$\begin{cases} 1 * f(0) < 0 \\ D > 0 \\ 1 * f(-4) > 0 \\ \dfrac{2(a-1)}{2} > -4 \\ 1 * f(4) > 0 \\ \dfrac{2(a-1)}{2} < 4 \end{cases} \qquad \ldots$$

Ответ: $\left[-0.9;-\dfrac{1}{2}\right]$

Квадратные неравенства.

Каждое из неравенств вида
***$mx^2 + px + q > 0$, $mx^2 + px + q < 0$, $mx^2 + px + q \geq 0$* или *$mx^2 + px + q \leq 0$*, где *$m \neq 0$*, называется квадратным относительно *x* (*m, p, q* – действительные числа или функции от некоторых параметров)**

Допустимыми являются те значения параметров, при которых *m, p, q* – действительны.

Пример № 8:

$$x^2 + 2x + a > 0.$$

1) $$x^2 + 2x + a = 0$$

Чтобы уравнение имело два корня, нужно чтобы $D > 0$

$$D = 4(1- a)$$

$$4(1- a) > 0$$

$D > 0$ при $a < 1$

$x_1 = -1 + \sqrt{1-a}$

$x_2 = -1 - \sqrt{1-a}$

Таким образом, при $a < 1$ $x < -1 - \sqrt{1-a}$ или $x > -1 + \sqrt{1-a}$

2) Если $a = 1$, неравенство принимает вид:

$$x^2 + 2x + 1 > 0$$

$$(x + 1)^2 > 0$$

Это неравенство верно при любых действительных значениях *x,* кроме $x = -1$.

3) При $D < 0$ а > 1, неравенство справедливо при любых действительных значениях *x*

Отсюда следует решение неравенства:

$x \in (-\infty; -1 - \sqrt{1-a}); (-1 + \sqrt{1-a}; +\infty)$ при $a < 1$,

$x \neq -1$, при $a = 1$,

x – любое действительное число, при а > 1.

Пример № 9:

Пусть требуется решить неравенство:

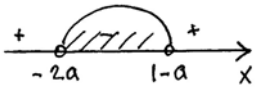
$$(x - 1 + a)(x + 2a) < 0$$

$$(x - 1 + a)(x + 2a) = 0$$

$x = 1 - a$ или $x = -2a$

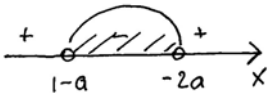
1) Пусть $1 - a > -2a$

$a > -1$



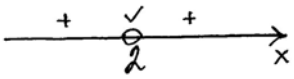
2) Пусть $1 - a < -2a$

$a < -1$



3) Пусть $1 - a = -2a$

$a = -1,\ x = 2$



Нет решений.

Отсюда следует решение неравенства:

$x \in (-2a;\ 1 - a)$ при $a > -1$,

$x \in (1 - a;\ -2a)$ при $a < -1$,

нет решений при $a = -1$.

Пример № 10:

Рассмотрим еще одно неравенство:

$$ax^2 - ax + 3 \le 0$$

$$ax^2 - ax + 3 = 0$$

1) $a = 0$

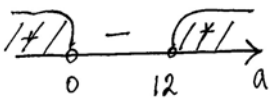
$0 * x^2 - 0*x + 3 = 0$

Нет решений.

2) $a > 0$

$ax^2 - ax + 3 \le 0$

$D = a^2 - 12a$

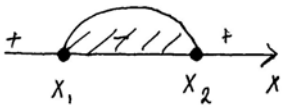


$D > 0$

$a(a - 12) > 0$

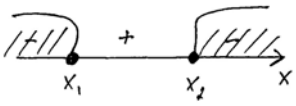
а) a > 12

$$x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 12a}}{2a}$$



б) a < 0

$$x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 12a}}{2a}$$



3) Если *D < 0,* то нет корней при *0 < a < 12*

4) Если *D = 0, a = 12*

$$12x^2 - 12x + 3 \le 0$$
$$4x^2 - 4x + 1 \le 0$$
$$x = \frac{1}{2}$$

Отсюда следует решение неравенства:

$(-\infty; \frac{a - \sqrt{a^2 - 12a}}{2a}]; \left[\frac{a + \sqrt{a^2 - 12a}}{2a}; +\infty\right)$ при a < 0, $\left[\frac{a - \sqrt{a^2 - 12a}}{2a}; \frac{a + \sqrt{a^2 - 12a}}{2a}\right]$ при

a > 12; $x = \frac{1}{2}$ при *a = 12;* нет решений при *0 ≤ a < 12.*

Иррациональные уравнения.

Уравнение называется иррациональным с одним неизвестным *x*, если одна или обе его части содержат выражения, иррациональные относительно *x*.

Пример № 11:

1) Пусть требуется решить уравнение:

$$\sqrt{x^2+ax-2a}=x+1$$

$$\begin{cases} x^2+ax-2a=x^2+2x+1 \\ x^2+ax-2a\geq 0 \\ x+1\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-ax+2a+1=0 \\ x\geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-2)x=2a+1 \\ x\geq -1 \end{cases}$$

1) Если $a = 2$, тогда
   $0 * x = 5$
   Нет решений.

2) Если $a \neq 2$

$$x=\frac{2a+1}{a-2}\text{, но}$$

$$\frac{2a+1}{a-2}\geq -1;\quad \frac{3a-1}{a-2}\geq 0;\ a\leq\frac{1}{3};\ a>2$$

Таким образом, уравнение не имеет решений, если $\frac{1}{3}\leq a<2$, уравнение имеет один действительный корень

$$x=\frac{2a+1}{a-2},$$

при $a\leq\frac{1}{3}$ или $a>2$.

Пример № 12:

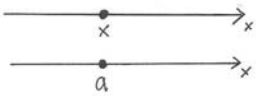
Решить уравнение:

$$(x+2012)\sqrt{x-a}=0$$

1) $\begin{cases} x+2012=0 \\ x-a\ge 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2012 \\ x\ge a \end{cases}$

2) $x - a = 0$

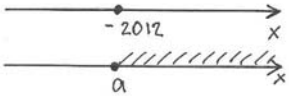
$x = a$



а)

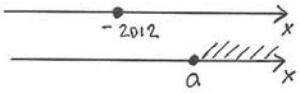
$a < -2012$, $x = -2012$

б)



$x = -2012$, $a = -2012$

в)



$x = -2012$, $a > -2012$
нет решений

Ответ: $x = -2012$ или $x = a$, при $a < -2012$; $x = a$, при $a \ge -2012$.

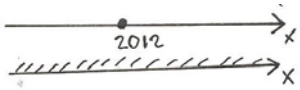
Пример № 13:

Решить уравнение:

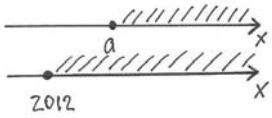
$(x-a)\sqrt{x-2012}=0$

1) $\begin{cases} x-a=0 \\ x-2012\ge 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=a \\ x\ge 2012 \end{cases}$

2) $x-2012=0$
$x=2012$

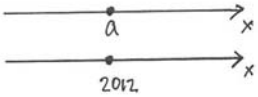


а)



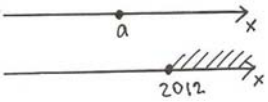
$x = a$, если $a > 2012$

б)



$x = 2012$, если $a = 2012$

в)



нет решений, если $a < 2012$

Ответ: $x = a$ или $x = 2012$, если $a > 2012$; $x = 2012$, если $a \le 2012$

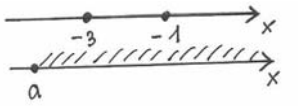
Пример № 14:

Найти, при каких значениях параметра a уравнение имеет ровно два решения?

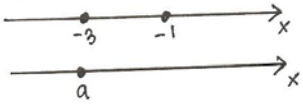
$$\left(x^2+4x+3\right)\sqrt{x-a}=0$$

1) $\begin{cases} x^2+4x+3=0 \\ x-a\ge 0 \end{cases}$ 2) $\begin{matrix} x-a=0 \\ x=a \end{matrix}$

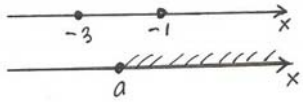
$\begin{cases} x=-1 \\ x\ge a \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-3 \\ x\ge a \end{cases}$

а) 

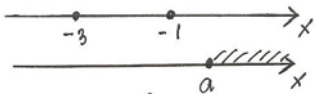
$a<-3$, 3 решения

б) 

$a=-3$, 2 решения

в) 

$-3<a<-1$, 2 решения

г) 

$a\ge -1$, 1 решение

Ответ: $-3\le a<-1$

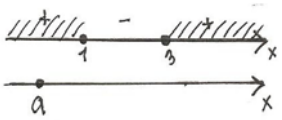
Пример № 15:

Найти, при каких значениях a уравнение имеет ровно два решения?

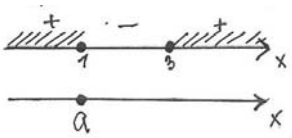
$$\left(x-a\right)\sqrt{x^2-4x+3}=0$$

1) $\begin{cases} x-a=0 \\ x^2-4x+3\ge 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=a \\ x^2-4x+3\ge 0 \end{cases}$ 2) $x^2-4x+3=0$

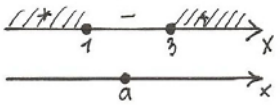
$x=1$ или $x=3$

а) 

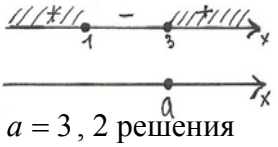
$a<1$, 3 решения

б) 

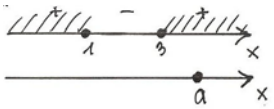
$a = 1$, 2 решения

в) 

$1 < a < 3$, 2 решения

г) 

$a = 3$, 2 решения

д) 

$a > 3$, 3 решения

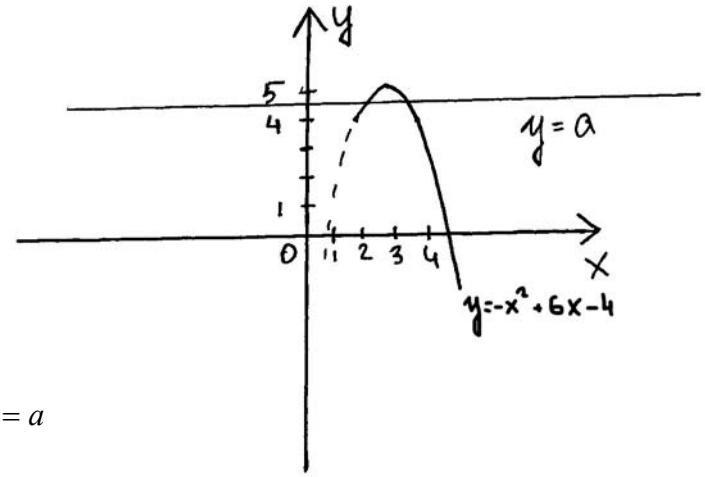
Ответ: $1 \le a \le 3$

Пример № 16:

При каких значениях a уравнение имеет 2 корня.

$y = -x^2 + 6x - 4$

$\sqrt{2x - a} = x - 2$



Решим графически:

$\begin{cases} 2x - a = x^2 - 4x + 4 \\ x \ge 2 \end{cases}$ $\begin{cases} -x^2 + 6x - 4 = a \\ x \ge 2 \end{cases}$

$y = -x^2 + 6x - 4$, при $x \ge 2$ $\qquad$ $y = a$

$x_0 = 3; y_0 = 5$

$y(2) = 4$

Ответ: $[4;5)$

Иррациональные неравенства.

Неравенство называется иррациональным с одним неизвестным *x*, если одна или обе его части содержат выражения, иррациональные относительно *x*.

Пример № 17:

$$\sqrt{x-a}+\sqrt{2x+1}>\sqrt{3x-4}$$

Иррациональное относительно *x*. Здесь *a* – параметр.

$$\begin{cases} x-a+2\sqrt{(x-a)(2x+1)}+2x+1>3x-4 \\ x-a\ge 0 \\ 2x+1\ge 0 \\ 3x-4\ge 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2\sqrt{(x-a)(2x+1)}>a-5(1) \\ x\ge a \\ x\ge \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

(1): $2\sqrt{2x^2-2ax+x-a}>a-5$

I.

$$\begin{cases} 4(x-a)(2x+1)>a^2-10a-25 \\ x\ge a \\ x\ge \dfrac{4}{3} \\ a-5\ge 0 \end{cases}$$

или

II.

$$\begin{cases} a-5<0 \\ x\ge a \\ x\ge \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

I.

$$\begin{cases} 8x^2+x(4-8a)-a^2+6a-25>0 \\ a\ge 5 \\ x\ge \dfrac{3}{4} \\ x\ge a \end{cases}$$

Т. к. x ≥ a, a ≥ 5, то имеем:

$$\begin{cases} 8x^2+x(4-8a)-a^2+6a-25>0 \\ x\ge a \\ a\ge 5(*) \end{cases}$$

$$8x^2+2x(2-4a)-a^2+6a-25>0$$
$$8x^2+(4-8a)x-a^2+6a-25=0$$
$$\frac{D}{4}=(2-4a)^2+8(a^2-6a-25)$$
$$\frac{D}{4}=24a^2-64a+204$$

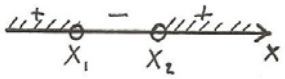
D > 0,

$$6a^2-16a+51>0$$
$$D=-968$$

значит, что при всех *a D > 0,*
то есть уравнение имеет два корня

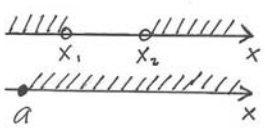
$$x_{1,2}=\frac{2a-1\pm\sqrt{6a^2-16a+51}}{4}$$

Пусть $x_1<x_2$,



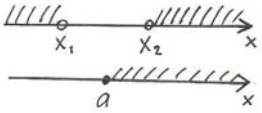
но $x\ge a$. Тогда возможны случаи:

а) если $x_1>a$,



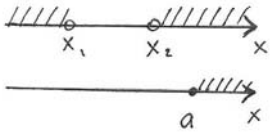
тогда $[a;x_1),(x_2;+\infty]$

б) если $x_1\le a\le x_2$,



тогда $(x_2;+\infty)$

в) если $x_2<a$,



тогда $[a;+\infty)$

а) Рассмотрим $x_1-a>0$

$$\frac{2a-1-\sqrt{6a^2-16a+51}}{4}-a>0$$

$$\sqrt{6a^2-16a+51}<-2a-1$$

$$\begin{cases}6a^2-16a+51<4a^2+4a+1\\-2a-1\ge 0\end{cases}\qquad\begin{cases}2a^2-20a+50<0\\a\le-\frac{1}{2}\end{cases}$$ не удовлетворяет (*), значит случай а)

невозможен и $x_1\le a$ при всех *a*

б) Рассмотрим $x_2 - a \geq 0$

$$\frac{2a-1-\sqrt{6a^2-16a+51}}{4} - a \geq 0$$

$$\sqrt{6a^2-16a+51} \geq 2a+1$$

Оценим $2a+1$

$a \geq 5$

$2a \geq 10$

$2a+1 \geq 11$

т.е $2a+1 > 0$

$6a^2-16a+51 \geq 1+4a+4a^2$

$a^2-10a+25 \geq 0$

$(a-5)^2 \geq 0$ -верно всегда

в) $x_2 - a < 0$ (аналогично с б)…

$(a-5)^2 < 0$ - нет решений, значит случай в) невозможен.

II. $\begin{cases} a-5<0 \\ x \geq a \\ x \geq \frac{4}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} a<5 \\ x \geq a \\ x \geq \frac{4}{3} \end{cases}$

1) если $\frac{4}{3} \leq a < 5$, тогда $x \geq a$

2) если $a < \frac{4}{3}$, тогда $x \geq \frac{4}{3}$

Отсюда следует решение неравенства:

$x \geq \frac{4}{3}$ при $a < \frac{4}{3}$, $x \geq a$ при $\frac{4}{3} \leq a < 5$, $x > \frac{2a-1+\sqrt{6a^2-16a+51}}{4}$ при $a \geq 5$

Показательные и логарифмические уравнения.

Показательное уравнение-это уравнение, которое содержит неизвестное в показателе степени.

Пример № 18:

При каких значениях *a* уравнение имеет корень:

$(a^2-1)2^{x-3}=a^2-3a-4$

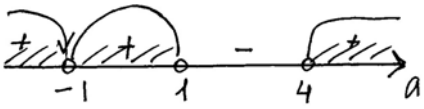
1) $a \neq \pm 1$, т.к тогда уравнение не имеет корней.

$$2^{x-3}=\frac{a^2-3a-4}{a^2-1}$$

$$\frac{a^2-3a-4}{a^2-1}>0$$

К.ч *4;-1*

К.з *1;-1*



Ответ: $(-\infty;-1);(1;-1);(4;+\infty)$

Пример № 19:

При каких *a* уравнение имеет решение?

$4^{\frac{2}{x}}+a*4^{\frac{1}{x}}-a-1=0$

Пусть $4^{\frac{1}{x}}=t$, $x \neq 0(*)$

$t^2+at-a-1=0$

$(t-1)(t+1)+a(t-1)=0$

$(t-1)(t+1+a)=0$

$t=1$ или $t=-1-a$

$4^{\frac{1}{x}}=1$

$\frac{1}{x}=0$

Нет решений.

$4^{\frac{1}{x}}=-1-a$

$-1-a>0$

$a<-1$

$-1-a \neq 1$

$a \neq -2$

Ответ: $a<-1$; $a \neq -2$

Логарифмическое уравнение – это уравнение, которое содержит неизвестное под знаком логарифма или (и) в его основании.

Пример № 20:

Найти, при каких значениях параметра *a* уравнение имеет 2 корня.

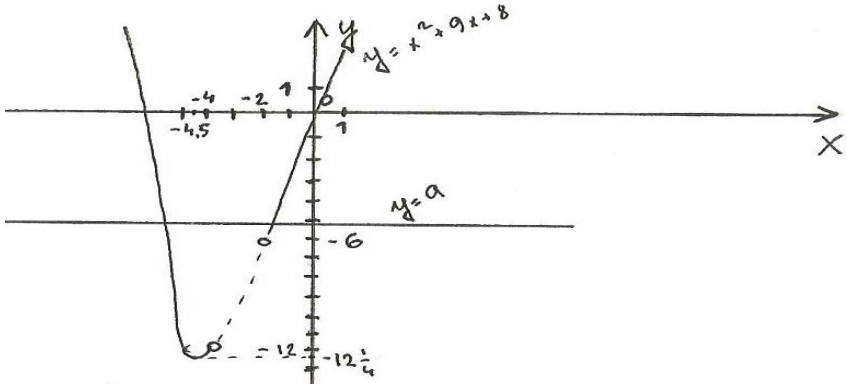
$$\lg\left(x^2+6x+8\right)=\lg(a-3x)$$

I.

$$\begin{cases} x^2+6x+8=a-3x(1) \\ x^2+6x+8>0(2) \\ a-3x>0 \end{cases}$$

1) $x^2+9x+8=a$

2) $x^2+6x+8>0$



II. $y=x^2+9x+8$

$x>-2; x<-4$

$x_0=-\dfrac{9}{2}; y_0=-12\dfrac{1}{4}$

$y(-4)=-12$

$y(-2)=-6$

Ответ: $\left(-12\dfrac{1}{4};-12\right);\left(-6;+\infty\right)$

Пример № 21:

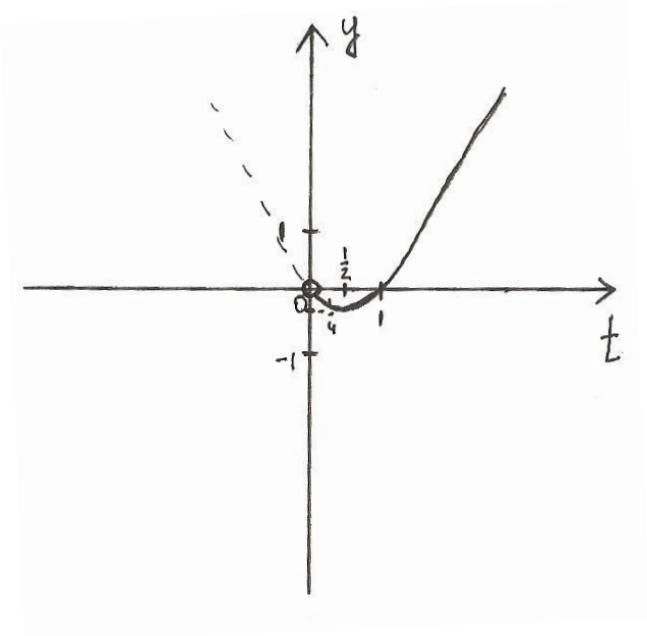
Найти, при каких значениях параметра *a* уравнение имеет 2 решения.

$$\log(9^x+9a^3)=x$$

$$\begin{cases} 9^x+9a^3=3^x(1) \\ 9^x+9a^3>0 \\ 3^x>0 \end{cases}$$

1) $3^{2x}-3^x=-9a^3$

пусть $3^x=t, t>0$



$$t^2 - t = -9a^3$$

$$y = t^2 - t$$

$$t_0 = \frac{1}{2}$$

$$y_0 = -\frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{4} < -9a^3 < 0$$

$$0 < a^3 < \frac{1}{36}$$

$$0 < a < \sqrt[3]{\frac{1}{36}}$$

Ответ: $\left(0; \sqrt[3]{\frac{1}{36}}\right)$

Показательные и логарифмические неравенства.

Показательными неравенствами считают такие неравенства, в которых неизвестное содержится в показателе степени.

Пример № 22:

Решить относительно *x*.

$$\frac{m^{2x}-10}{m^x+1}<3-\frac{15}{m^{2x}+m^x}$$

$$\frac{m^{2x}-10}{m^x+1}+\frac{15}{m^{2x}+m^x}-3<0$$

1)Рассмотри $m=1$:

$\frac{1^{2x}-10}{1^x+1}-\frac{15}{1^x(1^x+1)}-3<0$ - верно при любых действительных значениях *x*.

2)Рассмотрим случай, когда $m>0(m\neq 0)$, так как $m^x>0, m^x+1>0$, тогда неравенство

$$\frac{m^{2x}-10}{m^x+1}+\frac{15}{m^{2x}+m^x}-3<0 \text{ приведем к виду}$$

$$\left(m^{2x}-10\right)m^x+15-3m^x(m^x+1)<0$$

Пусть $m^x=t, t>0$

$$\left(t^2-10\right)t+15-3t\left(t+1\right)<0$$

$$\left(t-1\right)\left(t+3\right)(t-5)<0$$

Так как $(t+3)>0$, то оно равносильно неравенству

$$\left(t-1\right)\left(t-5\right)<0$$

$1<t<5$, значит

$1<m^x<5$

Отсюда при $m>1$ $0<x<\log_m 5$, при $0<m<1$ $\log 5<x<0$

Ответ: x – любое действительное число при $m=1$

$x\in\left(0;\log_m 5\right)$ при $m>1$

$x\in\left(\log_m 5;0\right)$ при $0<m<1$

Неравенство, содержащее неизвестное под знаком логарифма или (и) в его основании называется логарифмическим неравенством.

Пример № 23:

Найти все значения параметра *a*, при каждом из которых неравенство выполняется при любом действительном *x*.

$$1-\log_{\frac{1}{7}}(x^2+1)\geq \log_7\left(ax^2+4x+a\right)$$

$$\log_7 7+\log_7\left(x^2+1\right)\geq \log_7(ax^2+4x+a)$$

$$\begin{cases}7(x^2+1)\geq ax^2+4x+a\\ ax^2+4x+a>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2(7-a)-4x+7-a\geq 0\\ ax^2+4x+a>0\end{cases}$$

Условию задачи удовлетворяют значения *a,* для которых

$$\begin{cases}7-a>0\\ D_1=4-(7-a)^2\\ a>0\\ D_2=4-a^2<0\end{cases}\qquad \begin{cases}0<a<7\\ |7-a|\geq 2\\ |a|>2\end{cases}\qquad \begin{cases}0<a<7\\ 7-a\geq 2\\ a>2\end{cases}\qquad \begin{cases}0<a<7\\ a\leq 5\\ a>2\end{cases}\qquad 2<a\leq 5$$

Ответ: $2<a\leq 5$

Список литературы.

- Г. А. Ястребинецкий «Задачи с параметрами», Москва «Просвещение», 1986 г.
- С. А. Субханкулова «Задачи с параметрами», Москва «ИЛЕКСА», 2010 г.
- В.В. Ткачук «Математика абитуриенту», Москва Издательство МЦНМО, 2005 г.
- Д.Д. Гущин «Сборник заданий по алгебре для подготовки к ЕГЭ и к конкурсным экзаменам», Париж, 2006
- Шарыгин И.Ф. «Факультативный курс по математике», Москва, «Просвещение», 1989 г.