Санкт-Петербург
2010

Геометрические свойства кривых второго порядка

Ученицы 9 «А» класса
Школы №448
Микрюковой Александры

Преподаватель Л.С.Кноп

Кривые второго порядка, или коники, традиционно считаются объектом аналитической геометрии. При этом из их геометрических свойств упоминаются только оптические. Между тем, эти кривые обладают рядом других весьма красивых свойств, большая часть которых может быть доказана методами элементарной геометрии.

Часть 1.Определения

Пусть коза привязана веревкой к колышку. Ясно, что в этом случае она съест траву внутри круга, центром которого является колышек, а радиус равен длине веревки. Привяжем теперь козу к двум колышкам с помощью веревки и скользящего по ней кольца. В этом случае область, внутри которой коза съест траву, будет выглядеть как на рис. 1.1.

Граница этой фигуры характеризуется тем свойством, что сумма расстояний от любой ее точки до колышков равна длине веревки. Такая кривая называется *эллипсом*, а точки, в которые воткнуты колышки, — *фокусами*.

Понятно, что эллипс выглядит как «вытянутая окружность». У него, очевидно, есть две оси симметрии. Это прямая, соединяющая фокусы, и серединный перпендикуляр к отрезку с концами в фокусах. Эти две прямые называются *большой* и *малой осями эллипса*, а длины их частей, лежащих внутри эллипса, — длинами большой и малой осей. Расстояние между фокусами называют фокусным расстоянием.

Также очевидно, что длина веревки, к которой привязана коза, равна длине большой оси эллипса, внутренность которого она выедает.

Интуитивно ясно, что коза может добраться до любой точки внутри эллипса и пожевать там траву, а до точек вне этого эллипса она добраться не может. Но если переформулировать это утверждение на чисто математическом языке, оно уже не так очевидно.

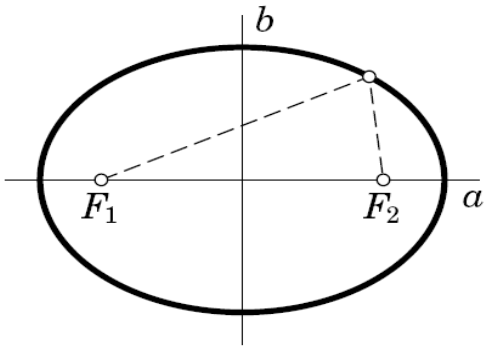


Рис. 1.1. F_1 и F_2 — фокусы, a и b — большая и малая оси

Теорема 1.1.

Докажите, что сумма расстояний от любой точки внутри эллипса до фокусов меньше, а от точки вне эллипса больше длины большой оси.

Доказательство:

Обозначим фокусы эллипса через F_1 и F_2, а точку через X. Точку пересечения луча F_1X с эллипсом обозначим через Y. Пусть сначала точка X лежит внутри эллипса. По неравенству треугольника F2X<XY+ YF2, а значит, $F_1X + XF_2 < F_1X + XY + YF_2 = F_1Y + F_2Y$ (рис. 1.2). Но $F_1Y + F_2Y$ равно длине веревки, к которой привязана коза, т. е. большой оси эллипса. Рассуждая аналогично в случае, если точка X лежит вне эллипса, получаем $F_2Y < XY + XF_2$. Следовательно, $F_1X+XF_2 = F_1Y+YX+XF_2 > F_1Y+F_2Y$.

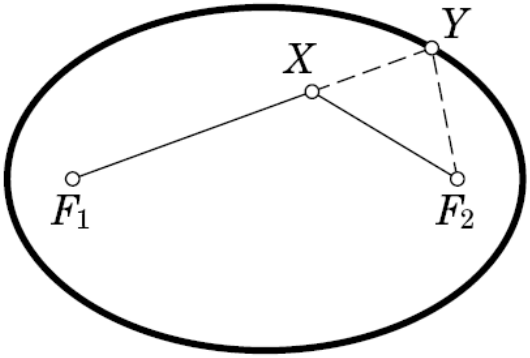


Рис. 1.2

Эллипсы часто встречаются в механике. Так, например, планета, двигаясь вокруг Солнца, описывает эллипс, причем Солнце находится в одном из его фокусов (закон Кеплера).

Эллипс является одним из примеров *кривых второго порядка*, или *коник*. Другими примерами таких кривых являются *парабола* и *гипербола*.

Гиперболой называется множество точек, модуль разности расстояний от которых до двух фиксированных точек, называемых *фокусами*, постоянен.

Гипербола состоит из двух дуг, которые сколь угодно близко приближаются к двум прямым, называемым *асимптотами гиперболы* (рис. 1.3). Гипербола с перпендикулярными асимптотами называется *равносторонней*.

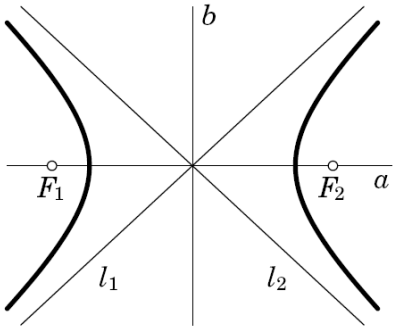


Рис. 1.3. F_1 и F_2 — фокусы, a и b — действительная и мнимая оси, l_1 и l_2 — асимптоты

Прямая, проходящая через фокусы гиперболы, является ее осью симметрии и называется *действительной осью*. Перпендикулярная ей прямая, проходящая через середину отрезка между фокусами, также является осью симметрии и называется

мнимой осью гиперболы.

Если комета летит мимо Солнца и силы притяжения Солнца недостаточно, чтобы оставить комету в пределах солнечной системы, то траекторией кометы будет дуга гиперболы, фокус которой находится в центре Солнца.

Параболой называется множество точек, расстояния от которых до фиксированных точки и прямой равны. Эти точка и прямая называются *фокусом* и *директрисой* параболы соответственно. Прямая, перпендикулярная директрисе и проходящая через фокус, называется *осью параболы* (Рис. 1.4.) Очевидно, что эта прямая является осью симметрии параболы.

Например, камень, брошенный под углом к горизонту, летит по параболе.

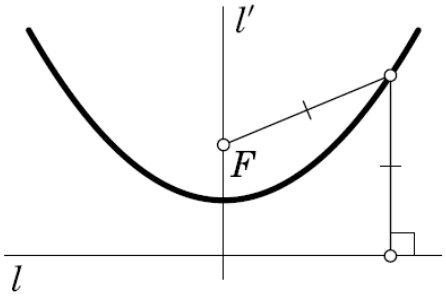


Рис. 1.4. F — фокус, l и l' — директриса и ось параболы

Для параболы и гиперболы верны утверждения, аналогичные теореме 1.1.

Теорема 1.2.

Для точек внутри параболы расстояние до фокуса меньше, чем расстояние до директрисы, а для точек вне параболы наоборот (рис. 1.5).

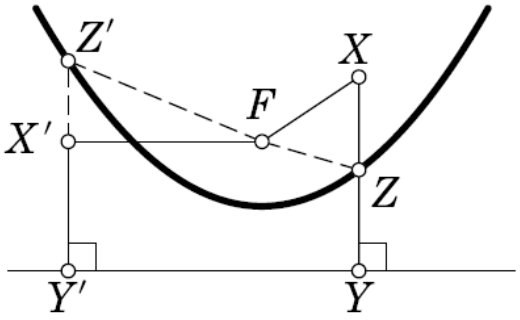


Рис. 1.5

Доказательство:

Проекцию точки X на директрису обозначим через Y, а точку пересечения XY с параболой через Z. Через F обозначим фокус параболы. По определению параболы FZ = ZY. Если точка X лежит внутри параболы, то XY = XZ + ZY. По неравенству треугольника FX<FZ+ZX=ZY+ZX=XY. Если точка X и парабола лежат по разные стороны от директрисы, то утверждение очевидно. Пусть точка X лежит вне параболы, но по ту же сторону от директрисы, тогда ZY = ZX+XY,

и по неравенству треугольника FX+XZ > FZ = ZY =ZX+XY. А значит, FX>XY, что и требовалось доказать.

Теорема 1.3.

Пусть модуль разности расстояний от любой точки на гиперболе до фокусов F_1 и F_2 равен d. Обозначим дугу гиперболы, внутри которой лежит F_1, через Г. Тогда для точек X вне Г величина $XF_2 - XF_1$ меньше d, а внутри - больше.

Доказательство:

Пусть точка X лежит внутри части, отсекаемой дугой Г. Обозначим точку пересечения луча F_2X и Г через Y. Получаем, что $F_2X = F_2Y + YX$. По неравенству треугольника $F_1X < F_1Y + YX$, значит, $F_2X - F_1X >$ $>(F_2Y+YX)-(F_1Y+YX)=F_2Y-F_1Y=d$. Если же точка X лежит вне Г, то, взяв за точку Y пересечение F_1X и Г, получим $F_1X=$ $=F_1Y + YX$. По неравенству треугольника $F_2X<F_2Y+YX$.

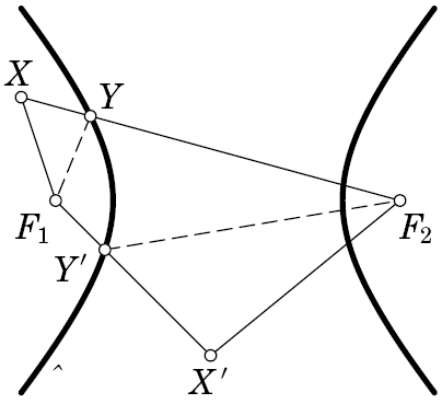


Рис. 1.6

Следовательно, $F_2X-F_1X<(F_2Y+YX)-(F_1Y+YX)=F_2Y-F_1Y=d$.

Задача.

Найдите геометрическое место центров окружностей, касающихся двух данных.

Решение:

Рассмотрим для определенности случай, когда окружности с центрами O_1, O_2 и радиусами r_1, r_2 лежат одна вне другой. Если окружность с центром O и радиусом r касается обеих окружностей внешним образом, то $OO_1 = r + r_1$, $OO_2 = r + r_2$ и, значит, $OO_1 - OO_2 = r_1 - r_2$, т. е. O лежит на одной из ветвей гиперболы с фокусами O_1, O_2. Аналогично если окружность касается обеих данных внутренним образом, то ее центр лежит на другой ветви этой гиперболы. Если же одно из касаний внешнее, а другое внутреннее, то модуль разности расстояний OO_1 и OO_2 равен $r_1 + r_2$, т. е. O описывает другую гиперболу с теми же фокусами. Аналогично если одна окружность лежит внутри другой, то искомое геометрическое место точек (ГМТ) состоит из двух эллипсов с фокусами O_1, O_2 и большими осями, равными $r_1 + r_2$ и $r_1 - r_2$.

Часть 2. Аналитическое определение и классификация кривых второго порядка

Ранее было сказано, что эллипс, парабола и гипербола являются частными случаями кривых второго порядка.

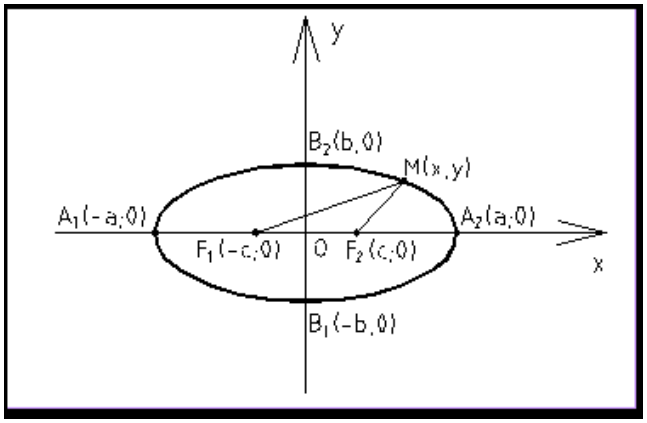
Определение.

Кривой второго порядка называется множество точек, координаты которых в некоторой (а значит и в любой) декартовой системе координат удовлетворяют уравнению второго порядка:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + fy + q = O$$

Если левая часть уравнения (1) разлагается на два множителя первой степени, то кривая является объединением двух прямых (возможно, совпадающих). В этом случае она называется *вырожденной*. Вырожденной считается также кривая, содержащая ровно одну действительную точку (например, $x^2 + y^2 = 0$).

В курсе аналитической геометрии показывается, что для любой невырожденной кривой существует система координат, в которой ее уравнение имеет достаточно простой вид.

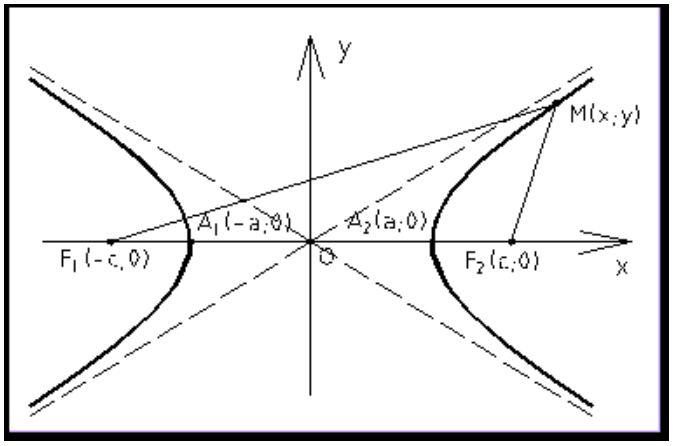


Кривая (I)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$a \geq b > 0,$$

является *эллипсом* с центром в начале координат, фокусами в точках $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ и большой и малой полуосями (т. е. половинами длин соответствующих осей), равными соответственно a, b. В частном случае $a=b$ эллипс (I) является окружностью.



Кривая (II)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

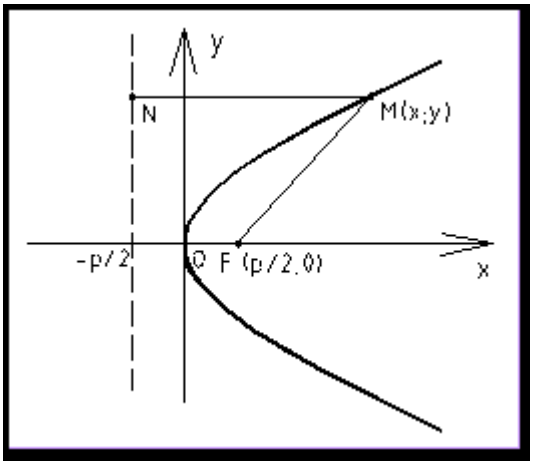
$$a > 0,\ b > 0,$$

является *гиперболой*, пересекающей свою действительную ось в двух точках, расстояние между которыми равно $2a$. Величина a называется действительной, а b — мнимой полуосью гиперболы. Прямые $x/y=\pm a/b$ являются асимптотами гиперболы, а точки $(\pm\sqrt{a^2+b^2}, 0)$ — ее фокусами. При $a=b$ гипербола (II) будет равносторонней.

В случае (III)

$$y^2=2px, \quad p>0,$$

кривая является параболой, ось которой совпадает с осью абсцисс, фокус находится в точке $(p/2, 0)$, а уравнение директрисы $x=-p/2$.



Кривая

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$$

называется *мнимым эллипсом* и не содержит ни одной действительной точки.

Часть 3. Оптическое свойство

Как известно, если луч света падает на зеркальную поверхность, то отражается он от нее под таким же углом, под которым упал. Это связано с так называемым принципом Ферма, гласящим, что свет всегда выбирает кратчайший путь. Давайте докажем, что этот путь действительно будет кратчайшим. Итак, дана прямая m и точки F_1 и F_2, лежащие по одну сторону от нее. Требуется найти такую точку P на прямой, что сумма расстояний от P до F_1 и F_2 будет минимальной. Отразив F_2 относительно прямой m, получим точку F'_2. Очевидно, что $F_2X=F'_2X$ для любой точки X на прямой l. Поэтому нам достаточно найти такую точку P, что сумм расстояний от P до F_1 и F'_2 будет как можно меньше. Очевидно, минимум достигается, когда точка P лежит на отрезке $F_1F'_2$, пересекающем прямую l. Тогда

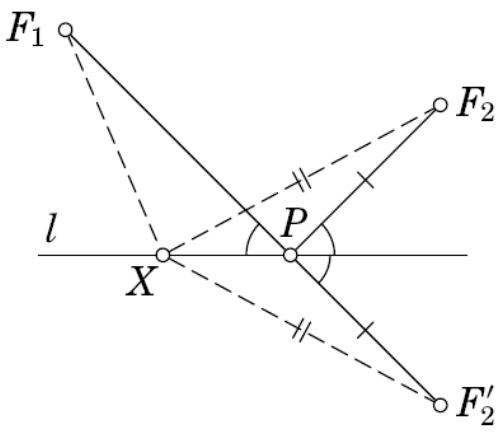


Рис. 1.7

требуемые углы, очевидно, равны (рис. 1.7).

Теперь сформулируем одно из важнейших свойств коник — так называемое оптическое свойство.

Теорема 3.1.

Пусть прямая l касается эллипса в точке P. Тогда прямая l — это внешняя биссектриса угла F_1PF_2 (рис. 1.10).

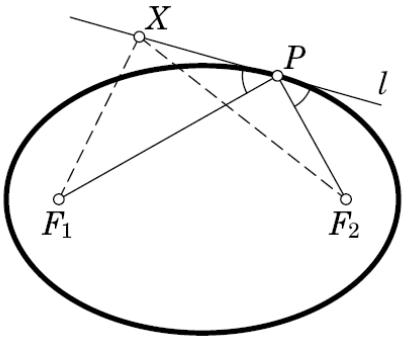


Рис. 1.10

Доказательств:

Пусть X— произвольная точка на прямой l, отличная от P. Так как X лежит вне эллипса, мы имеем $XF_1 + XF_2 > PF_1 + PF_2$, т. е. из всех точек прямой m точка P имеет наименьшую сумму расстояний до F_1 и F_2. Но в силу вышесказанного это означает, что углы, образованные прямыми PF_1 и PF_2 с l, равны.

Теорема 3.2.

Для парабол оптическое свойство формулируется следующим образом.

Пусть прямая l касается параболы в точке P. Проекцию точки P на директрису обозначим через P'. Тогда l является биссектрисой угла FPP' (рис. 1.11).

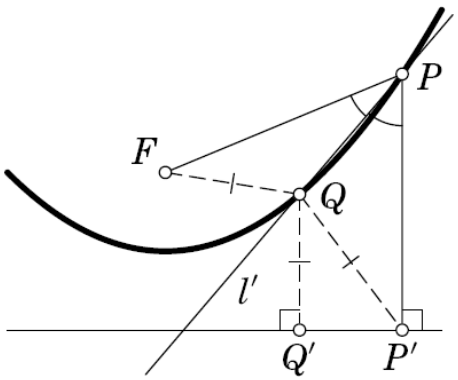


Рис. 1.11

Доказательство:

Предположим, что биссектриса угла FPP' (обозначим ее через l') пересекает параболу еще в какой-нибудь точке. Обозначим эту точку через Q, а ее проекцию на директрису — через Q'. По определению параболы $FQ=QQ'$. С другой стороны, треугольник FPP' равнобедренный, и

биссектриса угла P — это серединный перпендикуляр к FP'. А значит, для любой точки Q, лежащей на этой биссектрисе, выполняется равенство $QP'=QF=QQ'$. Но этого не может быть, так как Q' — единственная точка на директрисе параболы, в которой достигается минимум расстояния до точки Q.

Теорема 3.3.

Если прямая *l* касается гиперболы в точке P, то m является биссектрисой угла F_1PF_2, где F_1 и F_2 — фокусы гиперболы (рис. 1.12).

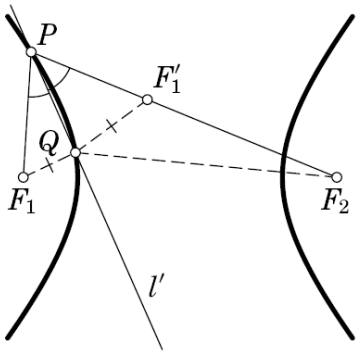


Рис. 1.12

Предположим, что биссектриса l' угла F_1PF_2 пересекает гиперболу еще в какой-нибудь точке Q (лежащей на той же дуге, что и P). Для удобства будем считать, что точка P лежит на дуге, которая ближе к фокусу F_1. Обозначим через F'_1 точку, симметричную F_1 относительно l'. Тогда $F_1Q=QF'_1$, $F_1P=PF'_1$; кроме того, точки F_2, F'_1 и P лежат на одной прямой. Итак, $F_2P-PF_1=F_2Q-F_1Q$. В силу вышеуказанных равенств получаем $F_2F'_1=F_2P-PF'_1=F_2Q-QF'_1$. Но по неравенству треугольника $F_2F'_1>F_2Q-QF'_1$.

Оптическое свойство параболы было известно еще древним грекам. Скажем, Архимед, расположив много медных щитов так, что они образовали параболическое зеркало, сжег осаждавший Сиракузы флот римлян.

Утверждение 1.

Рассмотрим семейство софокусных коник (так называются коники, у которых фокусы совпадают). Докажите, что любые гипербола и эллипс из этого семейства пересекаются под прямыми углами (углом между двумя кривыми называется угол между касательными к ним в данной точке их пересечения, см. рис. 1.13).

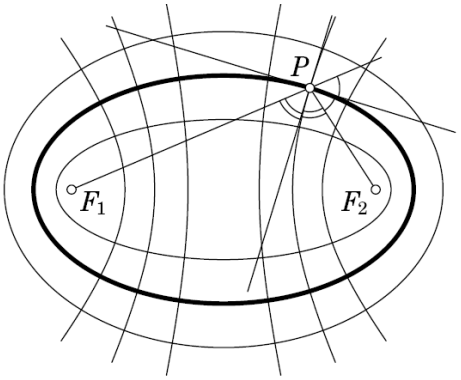


Рис. 1.13

Решение.

Пусть эллипс и гипербола с фокусами F_1 и F_2 пересекаются в точке P. Тогда касательные к ним в этой точке будут биссектрисами внешнего и внутреннего углов F_1PF_2 соответственно. Следовательно, они будут перпендикулярны.

Теорема 3.4.

Пусть хорда PQ содержит фокус F_1 эллипса, R —точка пересечения касательных к эллипсу в точках P и Q. Тогда R —это центр вневписанной окружности треугольника F_2PQ, а F_1 – – это точка касания этой окружности со стороной PQ (рис. 1.14).

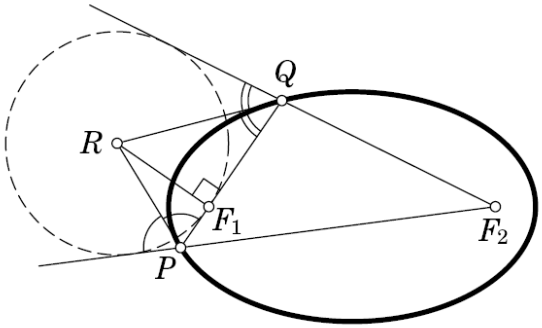


Рис. 1.14

Доказательство:

В силу оптического свойства PR и QR — это биссектрисы внешних углов треугольника F_2PQ. А значит, R — центр его вневписанной окружности. Точка касания вневписанной окружности со стороной (обозначим ее через F'_1) вместе с противоположной вершиной F_2 делят периметр треугольника пополам, т. е. $F'_1P+PF_2=F_2Q+QF'_1$. Но этим свойством обладает F_1, и такая точка только одна. Значит, F'_1 и F_1 совпадают.

Часть 4. Изогональное свойство коник

Теорема 4.1.

Проведем из любой точки P, лежащей вне эллипса, две касательные к нему. Пусть они касаются эллипса в точках X и Y. Тогда углы F_1PX и F_2PY равны (F_1 и F_2 — фокусы эллипса).

Доказательство:

Пусть F'_1, F'_2 — точки, симметричные F_1 и F_2 относительно PX и PY соответственно (рис. 1.15).

Тогда $PF'_1=PF_1$ и $PF'_2=PF_2$. Кроме того, точки F_1, Y и F'_2 лежат на одной прямой (в силу оптического свойства). То же самое верно и для точек F_2, X и F'_1.

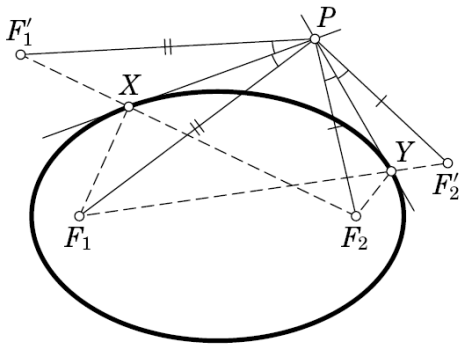


Рис. 1.15

Получаем $F_2F'_1=F_2X+XF_1=F_2Y+YF_1=F'_2F_1$. Следовательно, треугольники $PF_2F'_1$ и $PF_1F'_2$ равны (по трем сторонам). А значит,

$\angle F_2PF_1+2\angle F_1PX=\angle F_2PF'_1=\angle F_1PF'_2=\angle F_1PF_2+2\angle F_2PY$. Отсюда получаем, что $\angle F_1PX=\angle F_2PY$, что и требовалось.

Из рис. 1.16 видно, что аналогичное свойство выполнено для гиперболы.

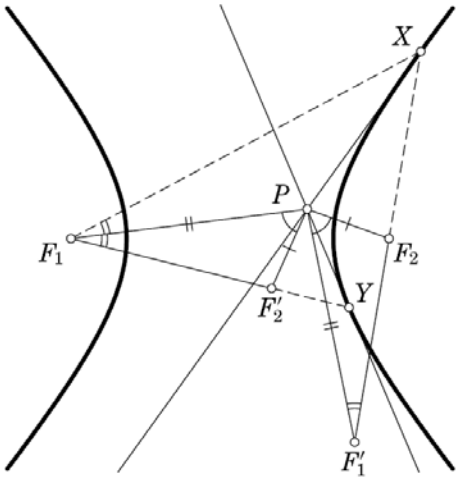


Рис. 1.16

Из конструкции, с помощью которой мы доказали теорему 4.1., можно получить еще один интересный результат. Поскольку треугольники $PF_2F'_1$ и PF'_2F_1 равны, равны углы PF'_1F_2 и $PF_1F'_2$. Получаем
$\angle PF_1X=\angle PF'_1F_2=\angle PF1F'2=\angle PF_1Y$.
Таким образом, доказана следующая теорема, являющаяся обобщением теоремы 3.4.

Теорема 4.2.

В обозначениях теоремы 4.1. прямая F_1P является биссектрисой угла XF_1Y (рис. 1.17).

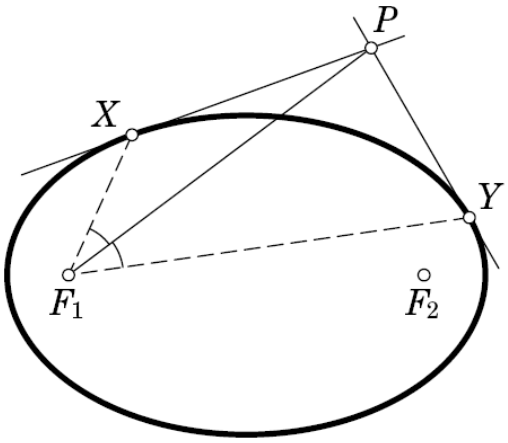


Рис. 1.17

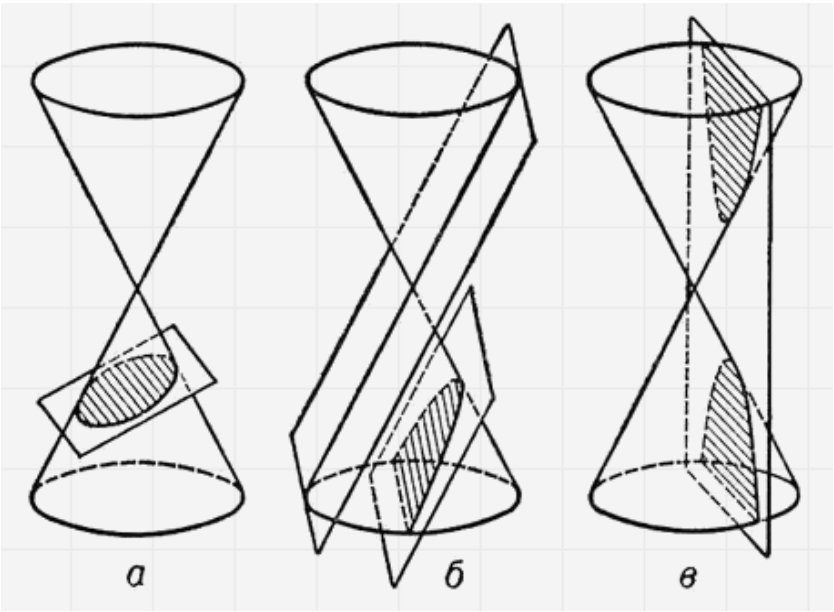
Конические сечения - линия пересечения кругового конуса с плоскостями, не проходящими через его вершину. Конические сечения могут быть трех типов:

а) - секущая плоскость пересекает все образующие конуса в точках одной его полости; линия пересечения - замкнутая овальная кривая - эллипс, в частности, когда плоскость перпендикулярна оси конуса, - окружность;

б) - секущая плоскость параллельна одной из касательных плоскостей конуса; в сечении получается незамкнутая, уходящая в бесконечность кривая - парабола, целиком лежащая в одной полости;

в) - секущая плоскость пересекает обе полости конуса; линия пересечения гипербола - состоит из двух одинаковых незамкнутых, простирающихся в бесконечность ветвей, лежащих на обеих полостях конуса.

С точки зрения аналитической геометрии К. с.— линии второго порядка.



<u>РАННЯЯ ИСТОРИЯ</u>

Открывателем конических сечений предположительно считается Менехм (4 в. до н.э.), ученик Платона и учитель Александра Македонского. Менехм использовал параболу и равнобочную гиперболу для решения задачи об удвоении куба.

Трактаты о конических сечениях, написанные Аристеем и Евклидом в конце 4 в. до н.э., были утеряны, но материалы из них вошли в знаменитые Конические сечения Аполлония Пергского (ок. 260–170 до н.э.), которые сохранились до нашего времени. Аполлоний отказался от требования перпендикулярности секущей плоскости образующей конуса и, варьируя угол ее наклона, получил все конические сечения из одного кругового конуса, прямого или наклонного. Аполлонию мы обязаны и современными названиями кривых – эллипс, парабола и гипербола.

В своих построениях Аполлоний использовал двуполостной круговой конус , поэтому впервые стало ясно, что гипербола – кривая с двумя ветвями. Со времен Аполлония конические сечения делятся на три типа в зависимости от наклона секущей плоскости к образующей конуса. Эллипс (рис. а) образуется, когда секущая плоскость
пересекает все образующие конуса в точках одной его полости; парабола (рис. б) – когда секущая плоскость параллельна одной из касательных плоскостей конуса; гипербола (рис. в) – когда секущая плоскость пересекает обе полости конуса.

Часть 6. Несколько замечательных свойств параболы

В этой части F мы будем обозначать фокус параболы, фигурирующей в рассуждениях.

Теорема 6.1.

Если фокус параболы отразить относительно касательной, то его образ попадет на директрису. Получившаяся точка будет проекцией точки, в которой касательная касается параболы (рис.1.24).

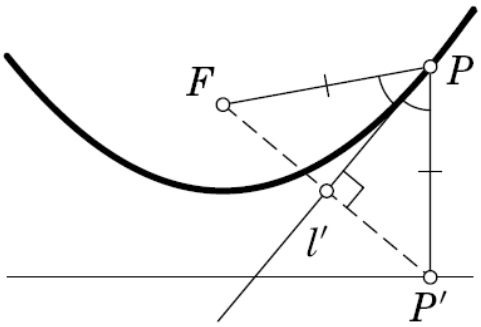


Рис. 1.24

Доказательство:

Пусть прямая l касается параболы в точке P. Проекцию P на директрису обозначим через P'. Так как треугольник FPP' равнобедренный и l — биссектриса угла P, l является осью симметрии треугольника. Значит, точка F при симметрии относительно l переходит в точку P', лежащую на директрисе.

Следствие

Проекции фокуса параболы на его касательные лежат на прямой, касающейся параболы в ее вершине (рис. 1.25).

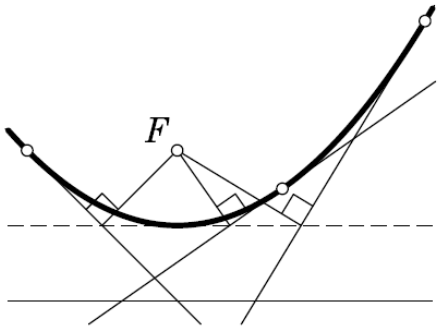


Рис. 1.25

Теорема 6.2.

Пусть касательные к параболе в точках X и Y пересекаются в точке P. Тогда P является центром описанной окружности треугольника $FX'Y'$, где X' и Y' — проекции точек X и Y на директрису параболы, а F — фокус этой параболы.

Доказательство:

В силу теоремы 6.2 эти две касательные являются серединными перпендикулярами к отрезкам FX' и FY'. Следовательно, точка их пересечения и будет центром описанной окружности треугольника $FX'Y'$ (рис. 1.26).

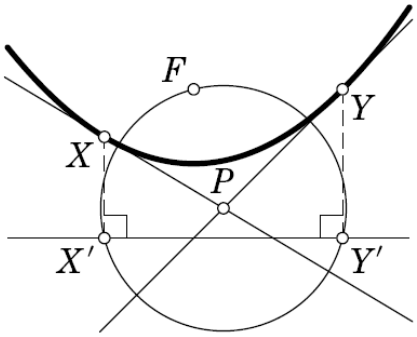


Рис. 1.26

Следствие

Если PX и PY — касательные к

параболе, то проекция точки P на директрису будет серединой отрезка с концами в проекциях точек X и Y (рис. 1.27).

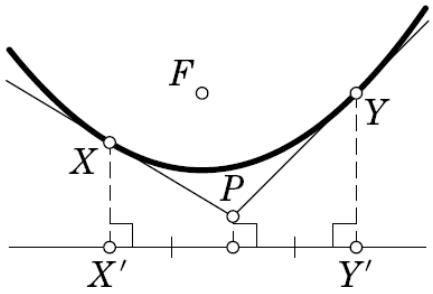


Рис. 1.27

Теорема 6.3.

Множество таких точек P, из которых парабола видна под прямым углом, есть директриса этой параболы. Кроме того, если PX и PY — касательные к этой параболе, то XY содержит F и PF — высота треугольника PXY (рис.1.28).

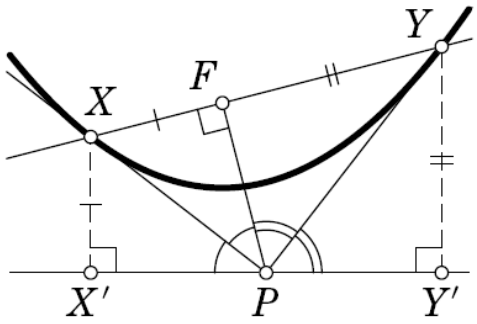


Рис. 1.28

Доказательство:

Пусть точка P лежит на директрисе, а X' и Y' — проекции точек X и Y на директрису параболы. Тогда треугольники PXF и PXX' равны (они просто

симметричны относительно PX). Значит, $\angle PFX = \angle PX'X = 90^\circ$. Аналогично

$\angle PFY = \angle PY'Y = 90^\circ$. Кроме того, $\angle XPY = 1/2(\angle FPX' + \angle FPY') = 90^\circ$. Других точек, обладающих этим свойством, нет.

Кривые второго порядка вокруг нас

Интерес к К. с. всегда поддерживался тем, что эти кривые часто встречаются в различных явлениях природы и в человеческой деятельности. В науке К. с. приобрели особенное значение после того, как немецкий астроном И. Кеплер открыл из наблюдений, а английский учёный И. Ньютон теоретически обосновал законы движения планет, один из которых утверждает, что планеты и кометы Солнечной системы движутся по К. с., в одном из фокусов которого находится Солнце. Следующие примеры относятся к отдельным типам К. с.: параболу описывает снаряд или камень, орошенный наклонно к горизонту (правильная форма кривой несколько искажается сопротивлением воздуха); в некоторых механизмах пользуются зубчатыми колёсами эллиптической формы («эллиптическая зубчатка»); гипербола служит графиком обратной пропорциональности, часто наблюдающейся в природе (например, закон Бойля — Мариотта).

Конические сечения часто встречаются в природе и технике. Например, орбиты планет, обращающихся вокруг Солнца, имеют форму эллипсов. Окружность представляет собой частный случай эллипса, у которого большая ось равна малой. Параболическое зеркало обладает тем свойством, что все падающие лучи, параллельные его оси, сходятся в одной точке (фокусе). Это используется в большинстве телескопов-рефлекторов, где применяются параболические зеркала, а также в антеннах радаров и специальных микрофонах с параболическими отражателями. От источника света, помещенного в фокусе параболического отражателя, исходит пучок параллельных лучей. Поэтому в мощных прожекторах и автомобильных фарах используются параболические зеркала.

Гипербола является графиком многих важных физических соотношений, например, закона Бойля (связывающего давление и объем идеального газа) и закона Ома, задающего электрический ток как функцию сопротивления при постоянном напряжении.

Список используемой литературы

- *Акопян А.В., Заславский А.А. «Геометрические свойства кривых второго порядка»*
- *А. А. Грешилов, Т. И. Белова «Аналитическая геометрия. Векторная алгебра. Кривые второго порядка»*
- http://www.cultinfo.ru/fulltext/1/001/008/063/842.htm *(дата обращения 09.12.10)*
- *http://www.krugosvet.ru/enc/nauka_i_tehnika/matematika/KONICHESKIE_SECHENIYA.html (дата обращения 05.11.10)*
- *http://www.pm298.ru/oprkonich.php (дата обращения 09.01.11)*
- *Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.— 10-е изд., испр. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.*
- *Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии: Учебн. пособие. — 13-е изд., стереот. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.*
- *http://a1vtu.narod.ru/le/12-13/krivie.htm (дата обращения 16.01.11)*

Оглавление

Часть 1.Определения…….....2
Часть 2. Аналитическое определение и классификация кривых второго порядка…….6
Часть 3. Оптическое свойство…….....7
Часть 4. Изогональное свойство коник…….....10
Часть 5. Конические сечения…….....12
Часть 6. Несколько замечательных свойств параболы……...13
Кривые второго порядка вокруг нас..……..16
Список используемой литературы……..17