Точки и линии, связанные с треугольником.

Работу выполнила ученица 10 класса ГОУ СОШ № 448
Челядинова Виолетта
Руководитель: Кноп Л. С.

В данной работе я рассматриваю произвольный треугольник и самые знаменитые, связанные с ним точки и линии: центр описанной окружности, медианы, центроид, биссектрисы углов, центр вписанной окружности, центры вневписанных окружностей, высоты, ортоцентр, прямую Эйлера и окружность девяти точек.

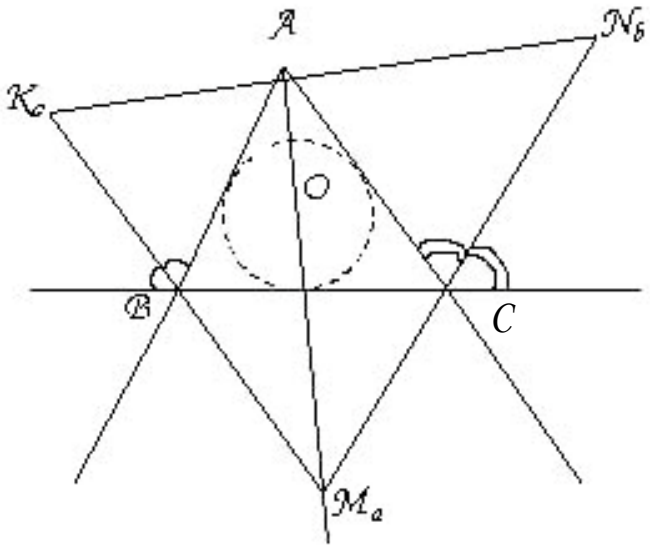
Я начала свое изучение с биссектрис. В школьном курсе доказано, что все биссектрисы треугольника конкурентны (т.е. все они проходят через одну точку). Внешние биссектрисы углов в школьном курсе не рассматриваются, хотя они тоже обладают неким занимательным свойством.

О биссектрисах внешних углов

На рисунке 1 изображен треугольник $M_AN_BK_C$, стороны которого являются биссектрисами внешних углов треугольника ABC. Любая точка на биссектрисе K_CM_A равноудалена от прямых AB и BC. Аналогично, любая точка на прямой M_AN_B равноудалена от прямых BC и CA. Следовательно, точка M_A, в которой эти биссектрисы пересекаются, находиться на одинаковом расстоянии r_A от всех трех сторон. Так как M_A равноудалена от сторон AB и AC, то она должна принадлежать множеству точек, равноудаленных от этих прямых, т.е. она должна лежать на прямой AO, внутренней биссектрисе угла A. Таким образом, справедлива следующая теорема.

***Теорема 1*: Внешние биссектрисы любых двух углов треугольника конкурентны с внутренней биссектрисой третьего угла.**

Рис. 1



Теорема Штейнера-Лемуса

Существует ряд геометрических задач, которые околдовывают каждого, кто по воле случая сталкивается с ними. По-видимому, это было характерно для геометрии даже в древнее время. Стоит только вспомнить три знаменитые задачи древности – удвоение куба, трисекцию угла и квадратуру круга. Попытки решить эти задачи привели к развитию новых ветвей математики.

Одна всегда возбуждавшая интерес теорема может быть сформулирована следующим образом:

Теорема 2: ***Любой треугольник, у которого равны длины биссектрис двух углов (измеряемые от вершины до противоположной стороны), является равнобедренным.***

Это теорема была послана великому шведскому геометру Якобу Штейнеру в 1840 году С. Л. Лемусом (имя которого, если бы не этот случай было бы давно забыто) с просьбой дать чисто геометрическое доказательство. Штейнер дал довольно сложное доказательство, которое вдохновило многих других на поиски более простых методов. Работы по теореме Штейнера-Лемуса появлялись в различных журналах в 1842, 1844, 1848 годах и почти каждый год с 1854 года по 1864 год, а также в большом количестве и в течение следующего столетия.

Одно из простейших доказательств опирается на следующие две леммы:

Лемма1: ***Если две хорды окружности стягивают различные острые углы с вершинами на этой окружности, то меньшему углу соответствует меньшая хорда.***

***Доказательство*:** Две равные хорды стягивают равные центральные углы и равные вписанные углы (как их половины). Из двух неравных хорд более короткая, находясь дальше от центра, стягивает меньший угол с вершиной в центре и, следовательно, меньший острый угол с вершиной на окружности.

Лемма2: ***В треугольнике с двумя различными углами меньший угол обладает большей биссектрисой.***

Доказательство*:* Пусть ABC – треугольник, в котором B<C, как на рисунке 2; пусть отрезки BM и CN делят пополам углы B и C. Я хочу доказать, что BM > CN. Возьму точку M’ на отрезке BM так, чтобы угол M’CN=1/2B. Так как этот угол равен углу M’BN, то четыре точки N, B, C, M’ лежат на одной окружности. Поскольку

угол B<1/2(B+C)<1/2(A+B+C),

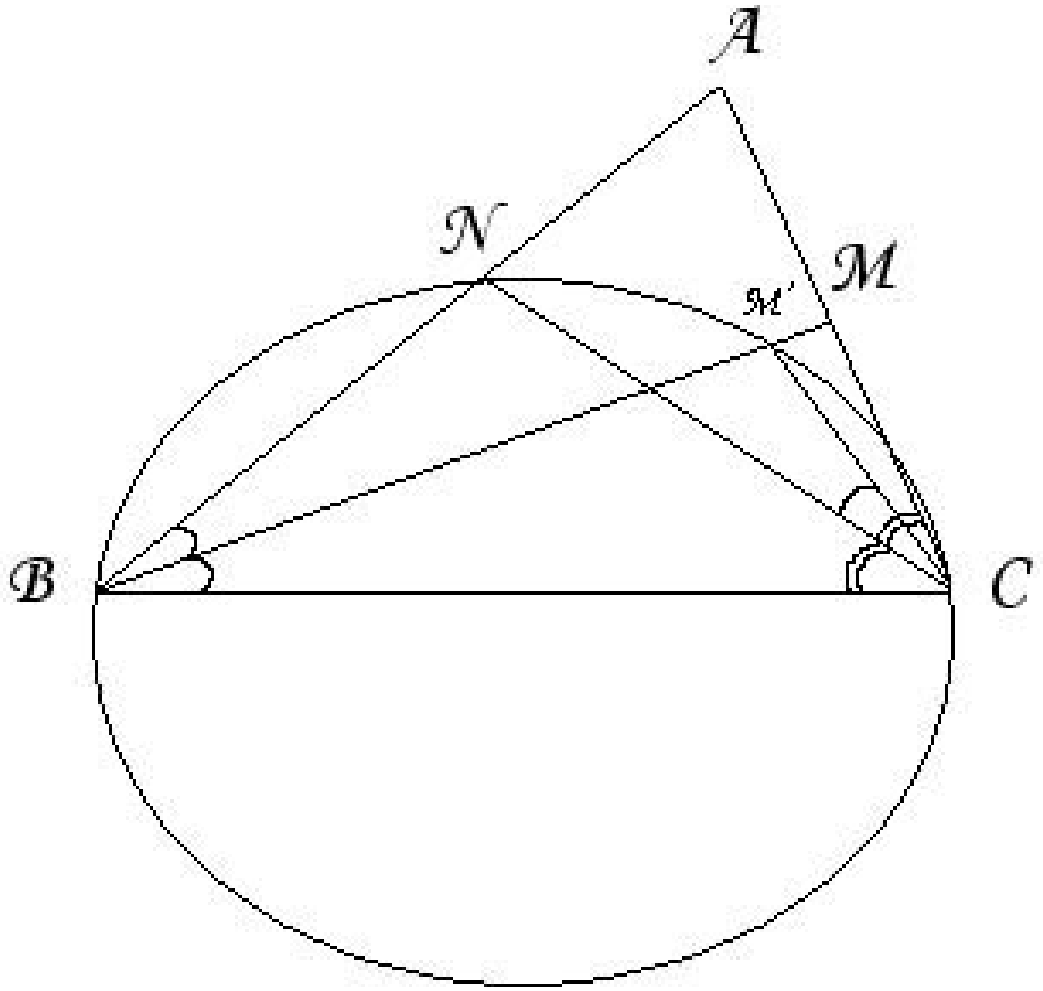
то

CBN<M’CB<90°.

Тогда по лемме 1: CN < M’B. Следовательно, BM > BM’ > CN.

Доказательство теоремы: Докажем от противного: пусть в треугольнике ABC угол B не равен углу C, тогда по лемме 2: BM ≠ CN, что противоречит условию теоремы.

Рис. 2



Доказательство леммы 2 имеет занятную историю. Оно было придумано двумя английскими инженерами Г. Джильбертом и Д. Мак-Доннеллом и опубликовано в American Mathematical Monthly 7 (1963), стр. 79-80, со следующим редакционным примечанием:

«Мартин Гарднер в своем обзоре книги Коксетера «Введение в геометрию» (Scientific American 204 (1961), стр. 166-168) описал эту знаменитую теорему столь интересно, что сотни читателей прислали ему свои доказательства. Он взял на себя труд по обработке этого громадного материала и совершенствовал его до тех пор, пока не заблистала, очищенная от наслоений, жемчужина», которую я привожу здесь.

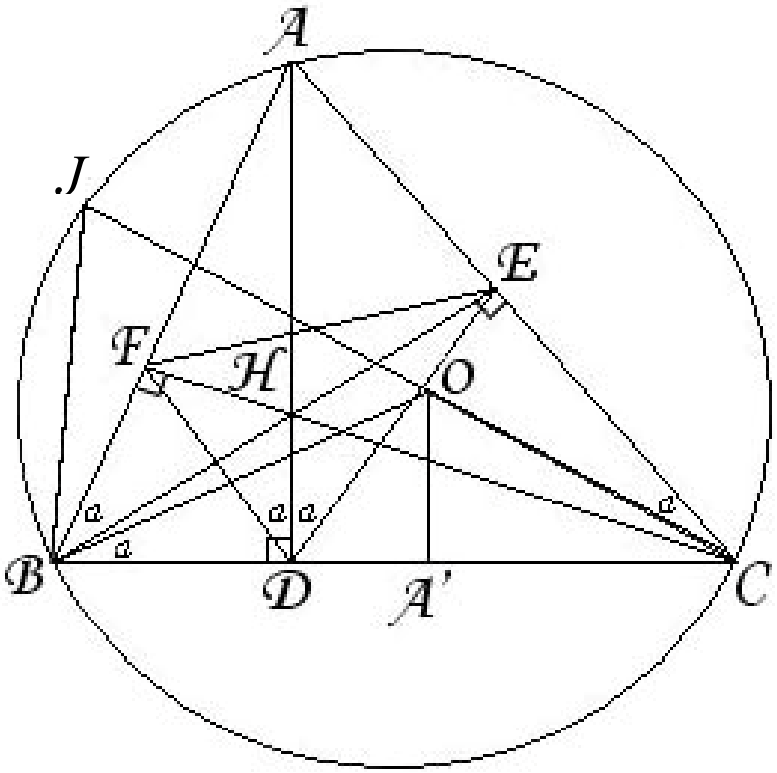
Ортотреугольник

Ортотреугольником треугольника ABC называется треугольник, вершинами которого являются основания высот треугольника ABC.

Ортоцентр – точка пересечения высот

Можно многое узнать, исследуя рисунок 3, на котором изображены остроугольный треугольник ABC, центр O описанной вокруг него окружности, ортоцентр H и ортотреугольник DEF. Объясню, почему я обозначила несколько углов на рисунке одним и тем же символом α, имеющим значение 90° – ∠A. Во-первых, так как треугольник OA'C подобен треугольнику JBC, то угол A'OC=A. Таким образом, величина каждого из углов при основании равнобедренного треугольника OBC равна 90° – A. Из прямоугольных треугольников ABE и ACF я получаю те же значения для углов EBA и ACF. Равенство последних двух углов можно было бы увидеть из того факта, что четырехугольник BCEF является вписанным, так как углы BEC и BFC – прямые.

Рис. 3



Аналогично, используя четырехугольники BDHF и CEHD, мы находим, что угол HDF=HBF=EBF=ECF=ECH=EDH.

Таким образом, отрезок HD является биссектрисой угла EDF.

Из тех же соображений получаем, что отрезок HE делит пополам угол FED, а отрезок HF – угол DFE. Поэтому я могу сформулировать следующий весьма интересный результат: высоты в треугольнике являются биссектрисами его ортотреугольника. Этот результат можно иначе записать в следующем виде:

Теорема 3: ***Ортоцентр остроугольного треугольника является центром окружности, вписанной в его ортотреугольник.***

Я уже отметила на рисунке 3, что угол HDF=DBO. А так как отрезок HD перпендикулярен отрезку DB, то и отрезок FD должен быть перпендикулярен отрезку OB. Аналогично показывается перпендикулярность отрезков DE и OC, а также EF и OA .

Серединный треугольник и прямая Эйлера

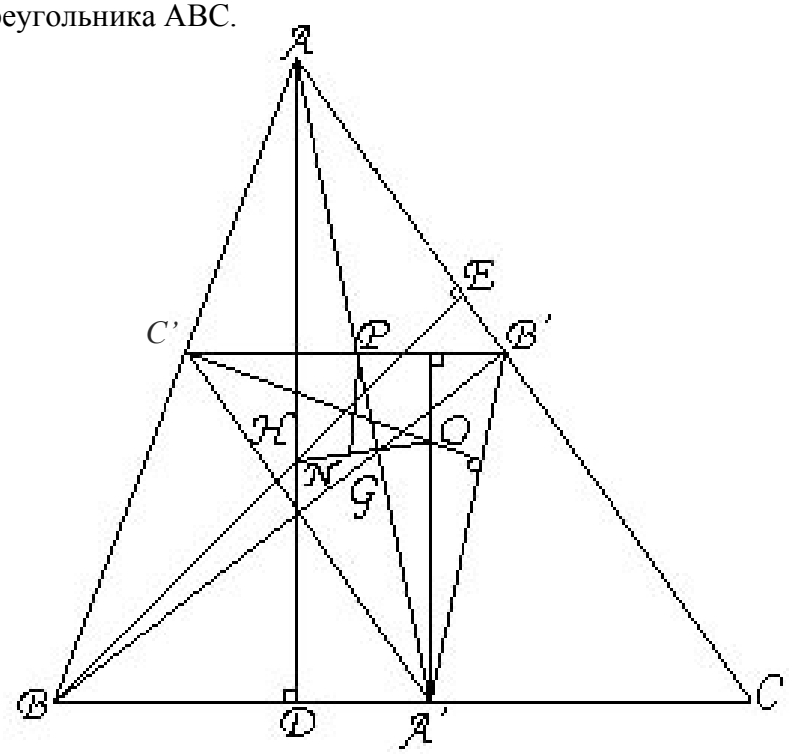
Треугольник, полученный соединением середин сторон данного треугольника, назову ***серединным треугольником***. На рисунке 4 треугольник A’B’C’ есть серединный треугольник треугольника ABC. Рассмотрим также две медианы AA’ и BB’, пересекающиеся в точке G, две высоты треугольника ABC, пересекающиеся в точке H, и две высоты треугольника A’B’C’, пересекающиеся в точке O. Поразительно, как много можно обнаружить, лишь изучая этот рисунок.

Во-первых, стороны треугольника A’B’C’ параллельны сторонам треугольника ABC, поэтому эти треугольники подобны. Далее, C’B’ = ½*BC, поэтому отношение длин любых двух соответствующих отрезков (а не только соответствующих сторон) будет равно 1:2. В действительности, отрезки B’C’, C’A’, A’B’ разбивают треугольник ABC на четыре равных треугольника. Кстати, точка P – середина отрезка B’C’ – также является и серединой отрезка AA’.

Далее видно, что AC’A’B’ – параллелограмм, следовательно, прямая AA’ делит пополам отрезок B’C’. Поэтому медианы треугольника A’B’C’ лежат на медианах треугольника ABC, а это означает, что оба треугольника имеют один и тот же центроид (т.е. точку пересечения медиан) G.

Высоты треугольника A’B’C’, изображенные на рисунке, являются серединными перпендикулярами сторон AB и BC треугольника ABC. Отсюда я делаю вывод, что точка O – ортоцентр треугольника A’B’C’ – является в то же время и центром окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

Рис. 4



Так как точка H – ортоцентр треугольника ABC, а точка O – ортоцентр подобного ему треугольника A’B’C’, то AH = 2*OA’. Так как медианы треугольника делят одна другую в отношение 2:1, то AG = 2*GA’. И, наконец, так как оба отрезка, AD и OA’, перпендикулярны стороне BC, то они параллельны. Следовательно,
угол HAG=OA’G, треугольник HAG~OA’G,
и угол AGH=A’GO.

Этим показано, что точки O, G, H лежат на одной прямой и HG = 2*GO, т.е. справедлива

Теорема 4: ***Ортоцентр, центроид и центр описанной окружности произвольного треугольника лежат на одной прямой. Центроид делит расстояние от ортоцентра до центра описанной окружности в отношение 2:1.***

Прямая, на которой лежат эти три точки, называется ***прямой Эйлера*** этого треугольника.

Изучим рисунок 4 более тщательно.

Я отметила точку N, где прямая Эйлера HO пересекает прямую, проходящую через точку P перпендикулярно отрезку B'C'. Все три прямые AH, PN и A'O, перпендикулярные к отрезку B'C', параллельны. Так как AP = PA'|, то прямая PN равноудалена от прямых AH и A'O. Следовательно, точка N – середина отрезка OH.

До сих пор в моих рассуждениях фигурировала сторона B'C' треугольника A'B'C'. Если провести те же рассуждения, но применительно к какой-либо другой стороне этого треугольника, то отрезок HO останется тем же, и он будет делиться пополам серединным перпендикуляром к новой стороне. Так как у отрезка HO только одна середина, то мы можем утверждать, что серединные перпендикуляры всех трех сторон треугольника A'B'C' будут проходить через точку N. Другими словами, точка N должна быть центром окружности, описанной вокруг треугольника A'B'C'.

Итак, центр окружности, описанной вокруг серединного треугольника, лежит в середине отрезка HO прямой Эйлера исходного треугольника. Кроме того, так как треугольник A'B'C' подобен треугольнику ABC, то радиус окружности, описанной вокруг серединного треугольника, равен половине радиуса окружности, описанной вокруг исходного треугольника.

Имя Эйлера появляется столь часто и в столь многих областях математики, что невозможно не сказать о нем несколько слов. Леонард Эйлер родился в 1707 году в г. Базеле (Швейцария). В 1727 году он был приглашен в Россию в Санкт-Петербургскую академию. В 1741 году он уехал в Берлин, чтобы получить кафедру математики Прусской академии. Он вернулся в Санкт-Петербург в 1766 году и оставался там вплоть до своей смерти в 1783 году.

Эйлер был неутомимым работником, его деятельность обогатила каждую область математики. Куда ни глянешь, всюду либо теорема Эйлера, либо формула Эйлера, либо метод Эйлера. Эйлер написал 473 мемуара, которые были опубликованы при его жизни, и еще 200, которые были опубликованы вскоре после его смерти, и еще 61 мемуар, которые были изданы позже. И все это несмотря на то, что в 1735 году он перестал видеть одним глазом, а в 1766 году обоими. Он обладал исключительным комбинаторным даром, и его интуитивное понимание математики было огромным.

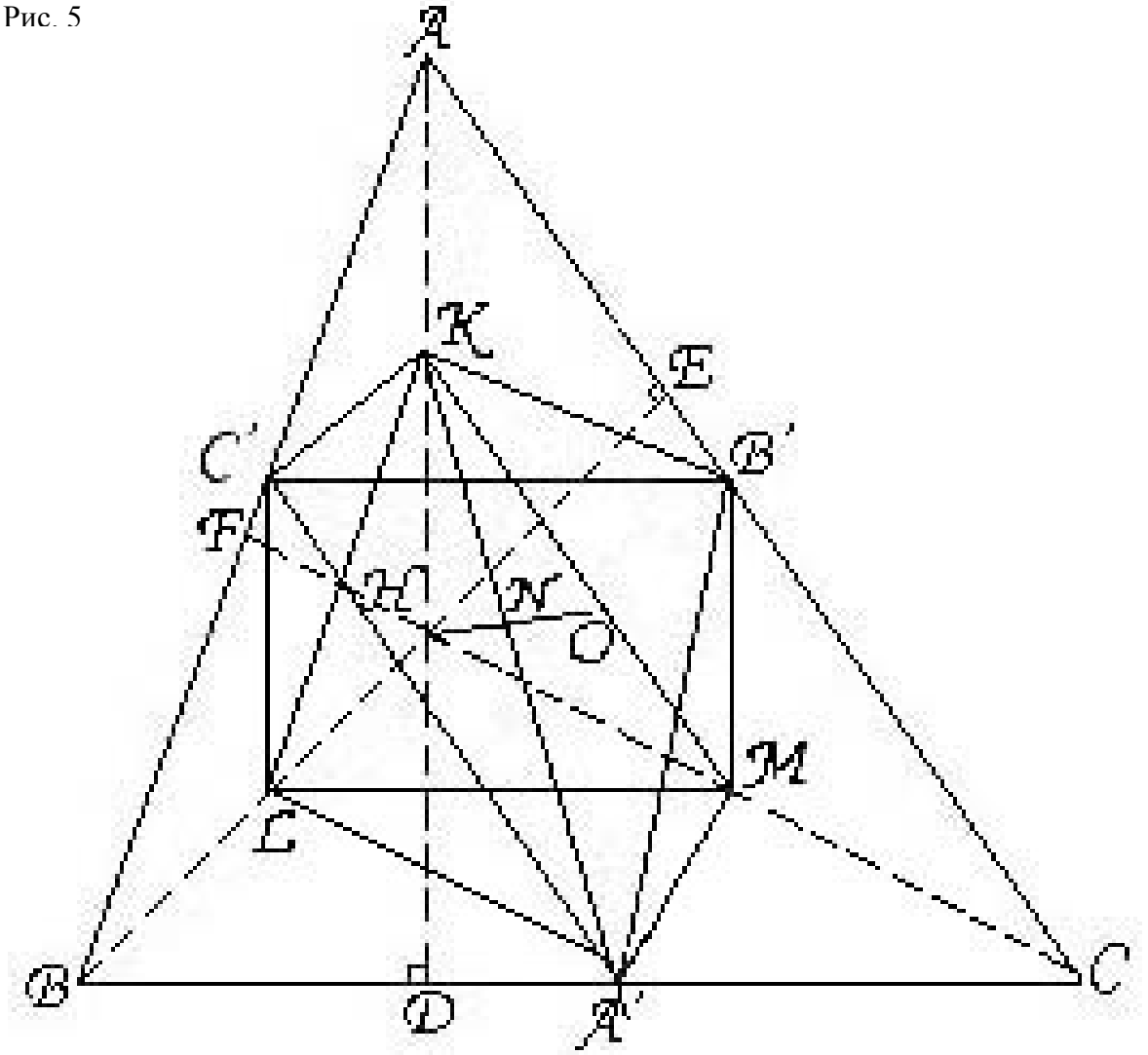
Окружность девяти точек

Чтобы облегчить восприятие дальнейшего, я убрала некоторые линии на рисунке 4 и добавила несколько других; в результате получился рисунок 5. Рассмотрим внимательно новый чертеж, на котором K, L, M – середины отрезков AH, BH, CH, лежащих на высотах. Так как BC – общая сторона двух треугольников ABC и HBC, а точки C’, B’ и L, M являются серединами других их сторон соответственно, то отрезки B’C’ и LM параллельны прямой BC (а их длины равны половине длины отрезка BC). Аналогично, так как AH – общая сторона двух треугольников BAH и CAH, то оба отрезка C’L и B’M параллельны прямой AH (а их длины равны половине длины отрезка AH). Следовательно, B’C’LM – параллелограмм. Так как отрезки BC и AH – перпендикулярны, то этот параллелограмм – прямоугольник. Аналогично, A’B’KL – прямоугольник (как и C’A’MK). Следовательно, A’K, B’L, C’M являются тремя диаметрами окружности, как показано на рисунке 6.

Так как угол A’DK – прямой, эта окружность (построенная на отрезке A’K, как на диаметре) проходит через точку D. Точно также она проходит через точки E и F. Суммируя вышесказанное, получаю:

Теорема 5: ***Основания трех высот произвольного треугольника, середины трех его сторон и середины трех отрезков, соединяющих его вершины с ортоцентром, лежат все на одной окружности радиуса 1/2R.***

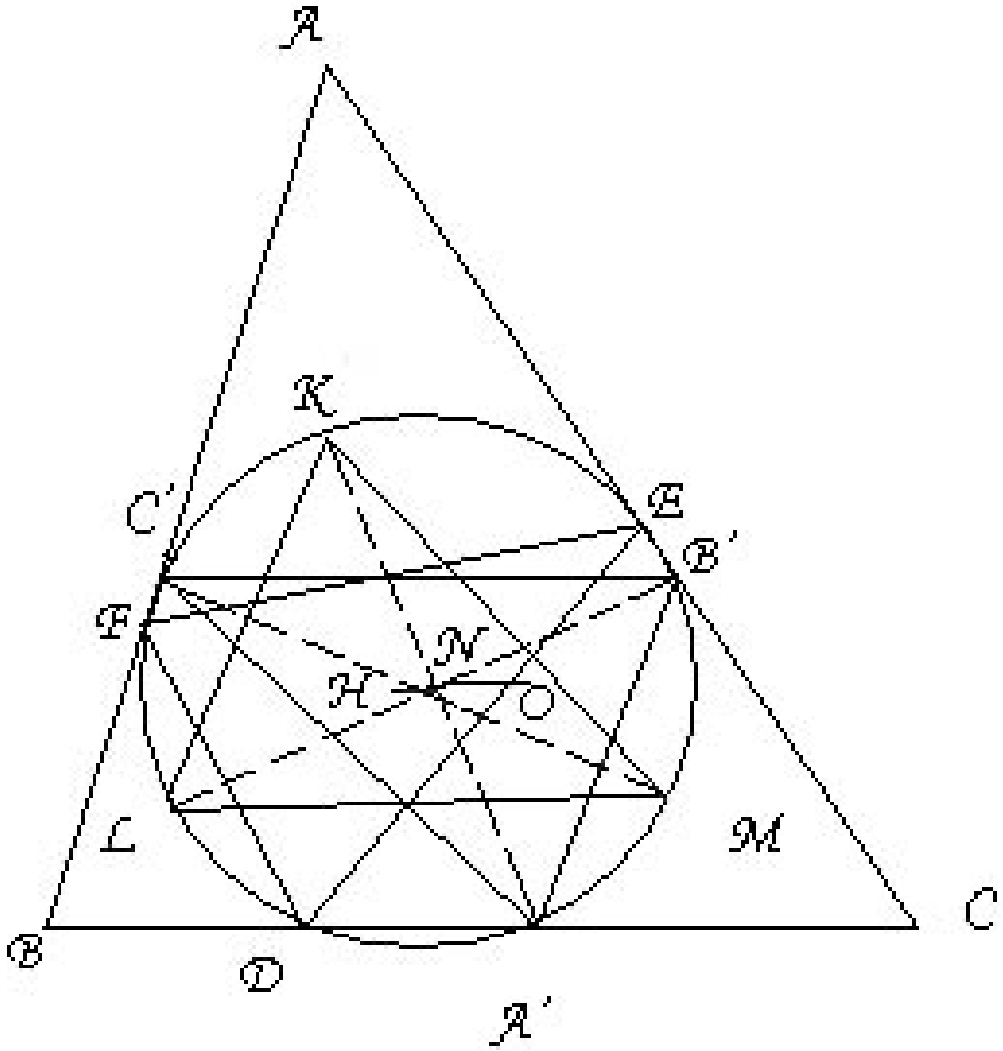
Рис. 5



Следуя Ж. В. Понселе, мы называем ее ***окружностью девяти точек*** этого треугольника. Так как три точки K, L, M диаметрально противоположны точкам A’, B’, C’, то каждый из двух треугольников KLM или A’B’C’ может быть получен из другого поворотом на 180° вокруг центра этой окружности. Очевидно, что этот поворот, который меняет местами эти два равных треугольника, должен также поменять местами и их ортоцентры H и O. Следовательно, центром окружности девяти точек является середина отрезка OH, которую уже ранее я обозначила через N, имея в виду ее будущую роль *центра окружности девяти точек.* Другими словами:

Теорема 6: ***Центр окружности девяти точек лежит на прямой Эйлера, точно в середине отрезка между ортоцентром и центром описанной окружности.***

Рис. 6



История этих двух теорем несколько запутана. Задача Б. Бивана, опубликованная в английском журнале в 1804 году, во-видимому, указывает на то, что эти теоремы уже тогда были известны. Иногда они ошибочно приписываются Эйлеру, который уже в 1765 году доказал, что *ортотреугольник и серединный треугольник имеют общую описанную окружность.* И в самом деле, европейские авторы часто называют эту окружность *«окружностью Эйлера»*. По-видимому, первое полное доказательство было опубликовано в 1821 году Понселе. К. Фейербах переоткрыл частичный результат Эйлера еще позже и добавил новое свойство, которое является настолько замечательным, что побуждает многих авторов называть окружность девяти точек *«окружностью Фейербаха»*.

Литература

1. Г.С.М. Коксетер, Новые встречи с геометрией. –М: «Наука» 1978 г.
2. И. Шарыгин, А. Ягубьянц, Окружность девяти точек и прямая Эйлера. «Квант» № 8, 1981г.
3. Я. Понарин, Элементарная геометрия. Том 1: планиметрия, преобразования плоскости. -М: МЦНМО, 2008г.
4. А, Г. Мякишев, Элементы геометрии треугольника. -М: МЦНМО, 2008г.