Кривая линия дракона

Работу выполнили ученицы 8 класса «А» ГОУ СОШ №448
Журавлева Анна
Букатка Кристина
Руководитель: Нечаева Т.С.

В данной работе мы работаем с кривыми и ломаными дракона: раскроем понятие, рассмотрим возможные варианты построения, изображения и получения данных интересующих нас линий.

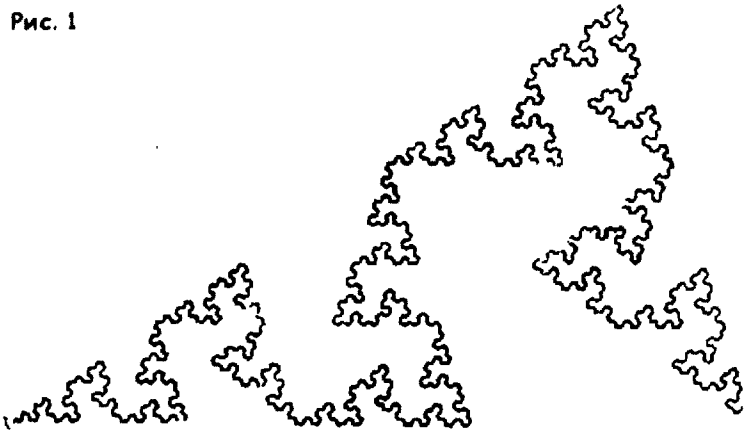
Для достижения поставленной цели в работе определены следующие задачи:

- выяснить, как устроены ломаные дракона и как их рисовать для достаточно больших *n*;
- изучить фрактал и его запись как L-систему, и также его описание рекурсивных функций на комплексной плоскости;
- выявить свойства и особенности данных кривых;
- попробовать решить задачи предоставленные нам журналом «Квант».

Мы взяли эту тему, не входящую в школьный курс геометрии, находя ее весьма интересной. Мы будем называть любую ломаную, полученную из бумажки, сложенную *n* раз, разворачиванием сгибов до 90°, ***ломаной дракона ранга n.*** Выясним, как устроены ломаные дракона и как их рисовать для достаточно больших *n*.

ЧТО ТАКОЕ КРИВАЯ И ЛОМАНАЯ ДРАКОНА

Рис. 1



Кривая имеет вид траектории, начерченной вдоль линий квадратной решетки. Каждый поворот кривой на 90° скруглен, чтобы показать более наглядно, что кривая не имеет точек самопересечения. Кривая действительно несколько напоминает дракона с когтистыми лапами и развернутой пастью, обращенной влево. (Это четко видно на рисунках 2 и 3). Ее также называют драконом Хартера-Хейтуэя (Harter-Heightway dragon).

Дракон Хартера, предельная фрактальная кривая (при *n* стремящемся к бесконечности), также известный как дракон Хартера — Хейтуэя, был впервые исследован физиками NASA — John Heighway, Bruce Banks, и William Harter. Он был описан в 1967 году Мартином Гарднером (Martin Gardner) в колонке «Математические игры» журнала «Scientific American». Многие свойства фрактала были описаны Chandler Davis и Дональдом Кнутом.

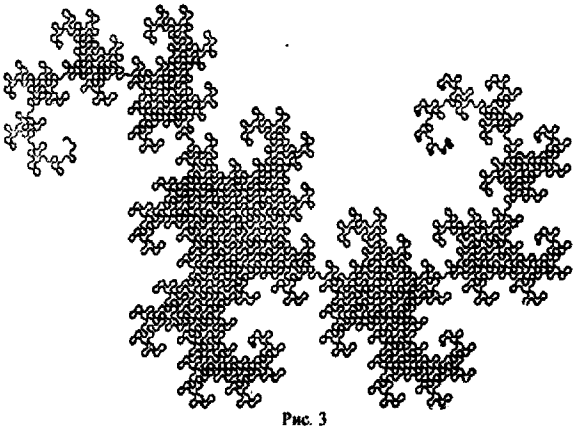


Рис. 3

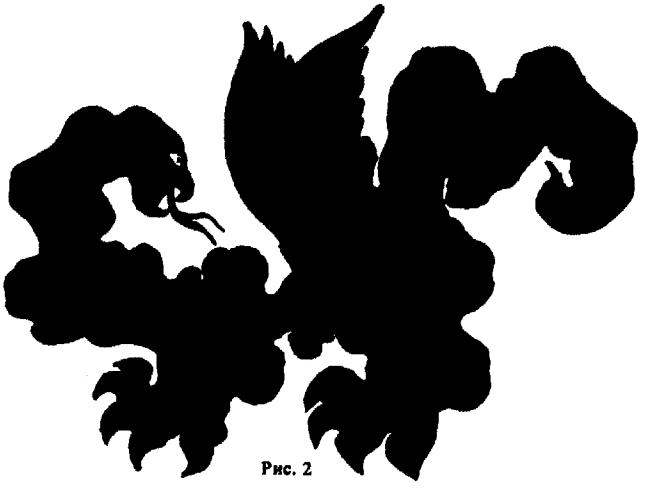


Рис. 2

Фрактал может быть записан как L-система с параметрами:

- угол равен 90°
- начальная строка — FX
- правила преобразования строк:
  - $X \mapsto X+YF+$
  - $Y \mapsto -FX-Y$

Кроме того, фрактал может быть описан системой рекурсивных функций на комплексной плоскости:

$$f_1(z) = \frac{(1+i)z}{2}$$
$$f_2(z) = 1 - \frac{(1-i)z}{2}$$

ВОЗМОЖНОЕ ПОСТРОЕНИЕ ЛОМАНЫХ ДРАКОНА

Первый способ

Ломаная дракона ранга n состоит из 2^n звеньев и соответственно имеет 2^n—1 вершин (не считая концов). Таким образом, у нее есть **средняя вершина** (при n>0), поскольку число вершин нечетно. Можно подметить, что каждая из этих ломаных состоит из двух одинаковых кусков, получающихся друг из друга поворотом на 90°. Оказывается, это **общая закономерность.**

Теорема 1. *Если продолжить любую ломаную дракона ранга n с концом в точке O точно такой же ломаной, полученной из данной поворотом на 90° вокруг точки O, то получится ломаная дракона ранга n+1, и обратно, любая ломаная дракона ранга n+1 получается из некоторой ломаной ранга n этим способом.*

В самом деле, допустим, мы хотим сложить полоску $n+1$ раз пополам. Сложим ее сначала один раз пополам. Тогда две ее половинки совпадут, и при дальнейших складываниях будут сгибаться пополам совершенно одинаково (рис. 4). Теперь развернем на 90° последние n сгибов полоски. Получим две совпадающие ломаные дракона ранга n;. остается развести их на 90° — и мы получим ломаную дракона ранга $n+1$ (рис. 5).

Рис. 5

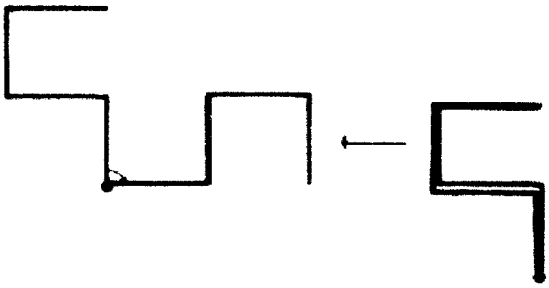
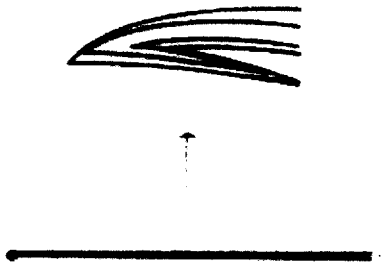


Рис. 4



Пользуясь теоремой 1. легко рисовать длинные ломаные дракона. Поскольку любая ломаная дракона идет по линиям квадратной сетки, ее удобно рисовать на клетчатой бумаге.

Возьмем любую короткую ломаную дракона (например, просто отрезок). Условимся, что одна из ее крайних точек — начало, а другая — конец. Продолжим ее такой же ломаной, повернутой относительно ее конца на 90° по (или против) часовой стрелке. Полученную новую ломаную таким же способом продолжаем от конца; так проделываем столько раз, сколько захочется, и сколько сможем. Это автоматически и быстро можно делать, если под рукой есть калька или, еще лучше, слегка прозрачная клетчатая бумага.

Очевидно, точно так же мы можем сразу рисовать и **кривые** дракона: нужно только каждый раз закруглять средний сгиб.

Замечательное свойство всех кривых дракона заключается в том, ***что они сами себя не пересекают***, или, что то же самое, ***ломаные дракона никогда не проходят по одному и тому же отрезку дважды.*** Таким образом, хотя ломаная дракона может дважды проходить через одну и ту же точку (вершину сетки), но более двух раз она в одну и ту же точку не попадает.

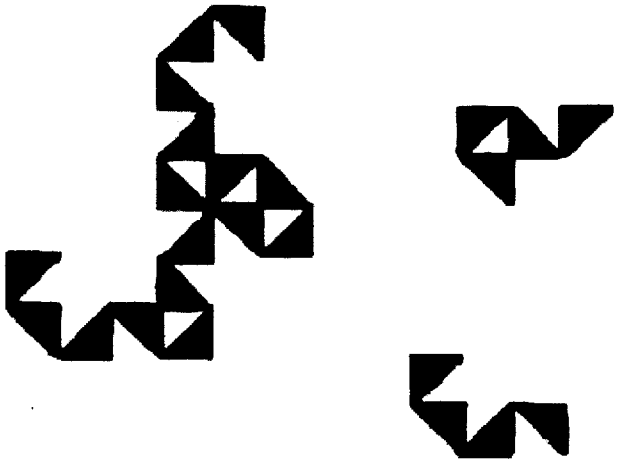


Рис. 6

Из теоремы 1 сразу не видно, как доказать, что ломаные дракона не проходят дважды по одному к тому же отрезку — наоборот, чем более длинные и запутанные ломаные или кривые рисуешь, тем более удивительно, как удачно их «выступы» и «впадины» подходят друг к другу (Рис. 6).

Однако нетрудно это доказать, используя другую теорему об «удвоений» ломаных дракона, которая, кстати, дает еще один способ рисовать длинные ломаные.

Второй способ

На рис. 6 вершины черных ломаных дракона соединены красными отрезками через одну. Мы видим, что красные отрезки снова составляют ломаные дракона. Оказывается, это тоже общая закономерность.

Чтобы точно ее сформулировать, заметим еще, что каждый красный отрезок является гипотенузой равнобедренного прямоугольного треугольника, катеты которого — звенья исходной ломаной (на рисунке треугольники слегка закрашены), причем каждые два соседних таких треугольника получаются друг из друга поворотом на 90° вокруг их общей вершины; другими словами, если идти вдоль красной ломаной дракона, то эти треугольники будут встречаться поочередно то справа, то слева.

Теорема 2. *Если на каждом звене ломаной дракона ранга n, как на гипотенузе, построить прямоугольный равнобедренный треугольник, причем так, чтобы для двух соседних звеньев эти треугольники получались один из другого поворотом на 90° относительно общей вершины, то катеты построенных треугольников составляют ломаную дракона ранга n+1. И наоборот, каждую*

ломаную ранга n+1 можно получить этим способом из некоторой ломаной ранга n.

В самом деле, проследим за **последним** складыванием полоски пополам. Для удобства мы будем ссылаться на условный рис. 7. Мы хотим сложить полоску пополам $n+1$ раз. Сложим ее сначала n раз и посмотрим на нее в профиль (синия линия на рис. 7). Затем сложим ее еще раз пополам и развернем этот последний сгиб на 90° (черная линия на том же рисунке*). Теперь бумажка идет от сгибов A к сгибам B и обратно не по гипотенузе, а по катетам равнобедренного прямоугольного треугольника ABC. Развернем теперь все остальные сгибы до 90° (на рис. 8 показано, как разворачивается отдельный сгиб). Тогда катеты прямоугольных треугольников образуют ломаную дракона ранга $n+1$, а гипотенузы — ранга n.

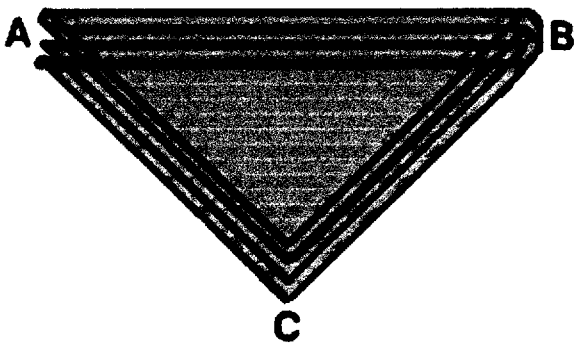


Рис. 7

Пользуясь этими соображениями, легко доказать оба утверждения теоремы 2.

* - На нашем рисунке черная линия в К2 раз длиннее красной, но это не имеет значения, поскольку нас интересует форма ломаной, а не ее размеры.

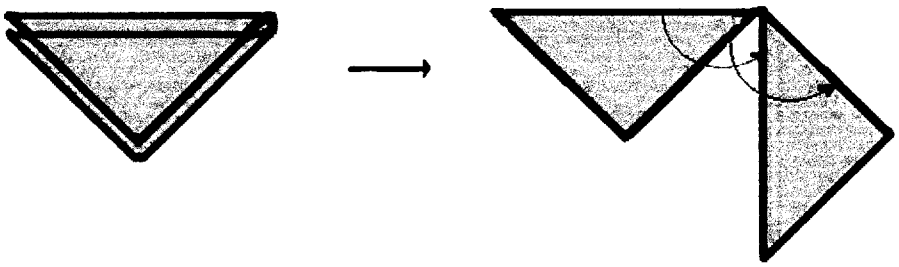


Рис. 8

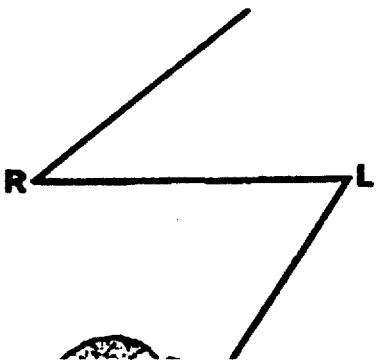
С помощью теоремы 2 из каждой ломаной дракона ранга n можно получить две разные ломаные ранга $n+1$: все зависит от того, по какую сторону от первого звена достроить треугольник.

Обратите внимание на то, что когда мы переходим от ломаной ранга n к ломаной ранга $n+1$ по теореме 1, то ломаная получается вдвое длиннее, а длина каждого звена не меняется; если же мы пользуемся для «удвоения» теоремой 2, то длина ломаной увеличивается в раз, а длина эвена уменьшается в $\sqrt{2}$ раз.

Построение кривой дракона с помощью последовательности двоичных цифр и букв:

Слова

Свойство, о котором вдет речь в теореме 2, можно объяснить совсем просто, если посмотреть на ломаные дракона (или, если угодно, на способы складывания бумажки) несколько с иной точки зрения.



Пусть по ломаной дракона ползет черепаха (рис. 9). Каждый раз, когда она доползает до вершины, ей приходится поворачивать на 90° налево или направо. С точки зрения черепахи, ее путь будет определяться последовательностью поворотов.

Например, для ломаной на рис. 2, а (начало в красной точке) эта последовательность будет выглядеть так: налево, налево, направо.

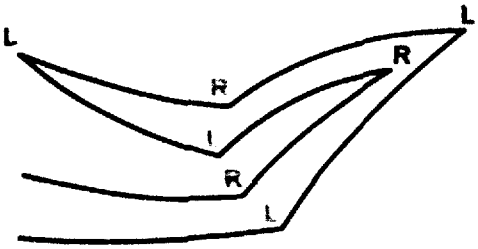
Будем поворот направо обозначать буквой *L*, а поворот налево — буквой *R*. Тогда вся ломаная запишется таким «словом»:

LLR

Точно так же можно записать, словом из букв *L* и *R* любую ломаную дракона.

Чтобы получить из ломаной *a* ломаную *b*, нужно бумажку сложить еще один раз «налево» (см. рис. 10). При этом между каждыми двумя вершинами ломаной *a* возникнет еще по одному повороту, причем на рис. 10 хорошо видно, что эти новые повороты будут чередоваться; таким образом, получим:

Рис. 10



$$\begin{matrix} L & L & R \\ L & R & L & R \end{matrix} \rightarrow LLRLLRR,$$

т. е. слово, являющееся записью ломаной *b*. При еще одном сгибе налево мы получили бы ломаную, характеризуемую словом

$$\begin{matrix} L & L & R & L & L & R & R \\ L & R & L & R & L & R & L & R \end{matrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow LLRLLRRLLLRRLRR.$$

Это — Главная ломаная дракона ранга 4.

Если вы проделаете над последним полученным словом ту же операцию еще раз (снова начав последовательность чередующихся букв с *L*), то получите слово из 31 буквы — запись Главной ломаной дракона ранга 5.

Разумеется, последовательность чередующихся букв можно начинать не с *L*, а с *R* — при этом получатся другие ломаные.

Легко видеть, что наш способ изготовления слова для ломаной ранга $n+1$ из слова для ломаной ранга *n* в точности соответствует геометрическому способу удвоения, о котором идет речь в теореме 2 (новым буквам соответствуют достраиваемые треугольники). Вообще всю «теорию» ломаных дракона можно было бы строить не геометрически — с помощью поворотов, достраивания треугольников и т. п., а «алгебраически»— с помощью операций над словами из двух букв *L* и *R*, «записями» ломаных дракона.

Двоичные цифры

Каждую кривую дракона также можно описать с помощью последовательности двоичных цифр, где 1 соответствует повороту налево, а 0 — повороту направо (кривая вычерчивается на листе бумаги от хвоста к пасти дракона). Формула для кривой дракона любого порядка (большего 1) получается с помощью следующего рекуррентного метода. К формуле кривой дракона предыдущего порядка мы справа приписываем единицу. Это дает нам половину формулы. Затем мы отыскиваем в наборе двоичных цифр, предшествующих приписанной единице, центральную единицу и заменяем ее на нуль,

после чего приписываем то, что получилось, справа от уже построенной половины формулы. Кривая дракона первого порядка имеет двоичную формулу 1. Приписав справа единицу, получим 11. Единственная цифра, стоящая перед приписанной единицей, является "центральной". Заменив ее на 0 и, приписав его справа, получаем двоичную формулу кривой дракона второго порядка: 110. Чтобы получить формулу кривой дракона третьего порядка, приписываем к 110 справа 1 и, изменив центральную цифру числа 110 с 1 на 0, повторяем его справа от 1101: 1 101 100. Аналогично получаются формулы для кривых дракона более высокого порядка. Нетрудно видеть, что кривая дракона n-го порядка (n>1) состоит из двух экземпляров кривых дракона *(n—1)*-го порядка, соединенных "головой к голове", в силу чего вторая кривая вычерчивается "наоборот": не от хвоста к голове, а от головы к хвосту.

Формулы кривых дракона с 1 до 6 порядка:
1
110
1101100
110110011100100
1101100111001001110110001100100
110110011100100111011000110010011100110011100100011011000110010 0

Складывание бумажной полоски

Один из способов построения кривой дракона - складывание длинной бумажной полоски. Начнем с горизонтальной полоски: согнем вверх ее правую половину и наложим на левую. Затем сложим полученную двойную полоску так, чтобы перегиб, расположенный ранее справа, совпал с левым краем сложенной полоски; повторим этот процесс столько раз, сколько сможем. (Практически это вряд ли удастся сделать больше семи раз – ведь уже при восьмом складывание получилось бы $2^8 = 256$ слоев (!), но теоретически процесс можно продолжать до бесконечности). Если после этого бумагу развернуть, то на ней получится интересная последовательность сгибов. Обозначим обращенный вверх сгиб через *U*, а обращенный вниз сгиб - через *D*. Тогда начало последовательности выглядит так:

ÛÛDÛUDDÛUUDDUDDÛUUDUUDDDUUDDUDDÛU

Первый, второй, четвертый, восьмой и т.д. сгибы, отмеченные символом ˆ, назовем "наружными". Легко видеть, что сгиб, находящийся на *k* шагов впереди наружного, всегда направлен противоположно сгибу, расположенному на *k* шагов позади. Это свойство вместе с тем фактом, что наружными могут быть только сгибы *U* (потому что полоску складывали только вверх), определяет правило, позволяющее выписать сколько угодно членов этой последовательности. Существуют и другие, эквивалентные правила. Например, если $n = 2kq$, где q нечетно, то *n*-ый сгиб есть *U* или *D* в зависимости от того, сравнимо ли *q* по модулю 4 с 1 или с 3.

Далее поставим полоску вертикально и согнем бумагу на 90° в каждом сгибе в направлении этого сгиба. Получим кривую дракона. Если 3 раза повернуть полученный узор на четверть оборота (на 90°) вокруг его начальной точки, т.е. из одной и той же точки построить хвостом к хвосту четырех драконов, то они нигде не пересекутся.

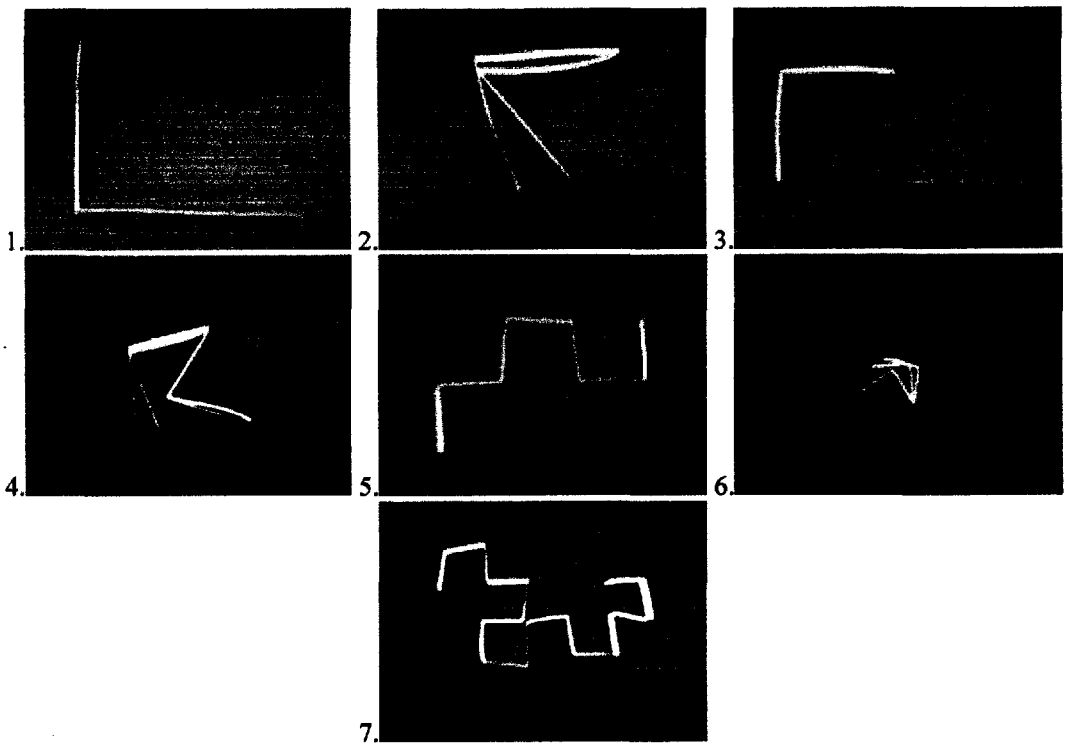


Рис. 11

Соединим начальную точку со второй вершиной кривой дракона, вторую - с четвертой и т.д. В результате получится копия исходного узора, только увеличенная в $\sqrt{2}$ раз и повернутая на 45° по часовой стрелке. Отсюда видно, что наружные сгибы принадлежат логарифмической спирали с полюсом в начальной точке кривой.

Исследовано много вариантов складывания. Вероятно, самым простым из них является складывание, при котором вместо того, чтобы сгибать полоску всегда вверх, ее сгибают поочередно то вверх, то вниз. Тогда в последовательности сгибов наружными оказываются то U, то D, но правило, связанное с наружными сгибами, сохраняется: k-ый сгиб после наружного сгиба всегда направлен противоположно k-ому сгибу, предшествующему ему. Это вариант складывания представлен на следующих двух рисунках. На рисунке показан узор, который получается после развертывания сложенной таким образом полоски и многократного сгибания ее, но не на углы в 90°, а на углы в 108°. Весь получаемый таким образом узор умещается в бесконечном секторе с углом 36°. Наружные сгибы лежат поочередно то на правой, то на левой границе сектора. Если согнуть полоску еще немного, уменьшив углы до 90°, получится не имеющий самопересечений маршрут, показанный на рисунке 12. На рисунке уголки закруглены, чтобы было лучше видно, как проходит этот путь.

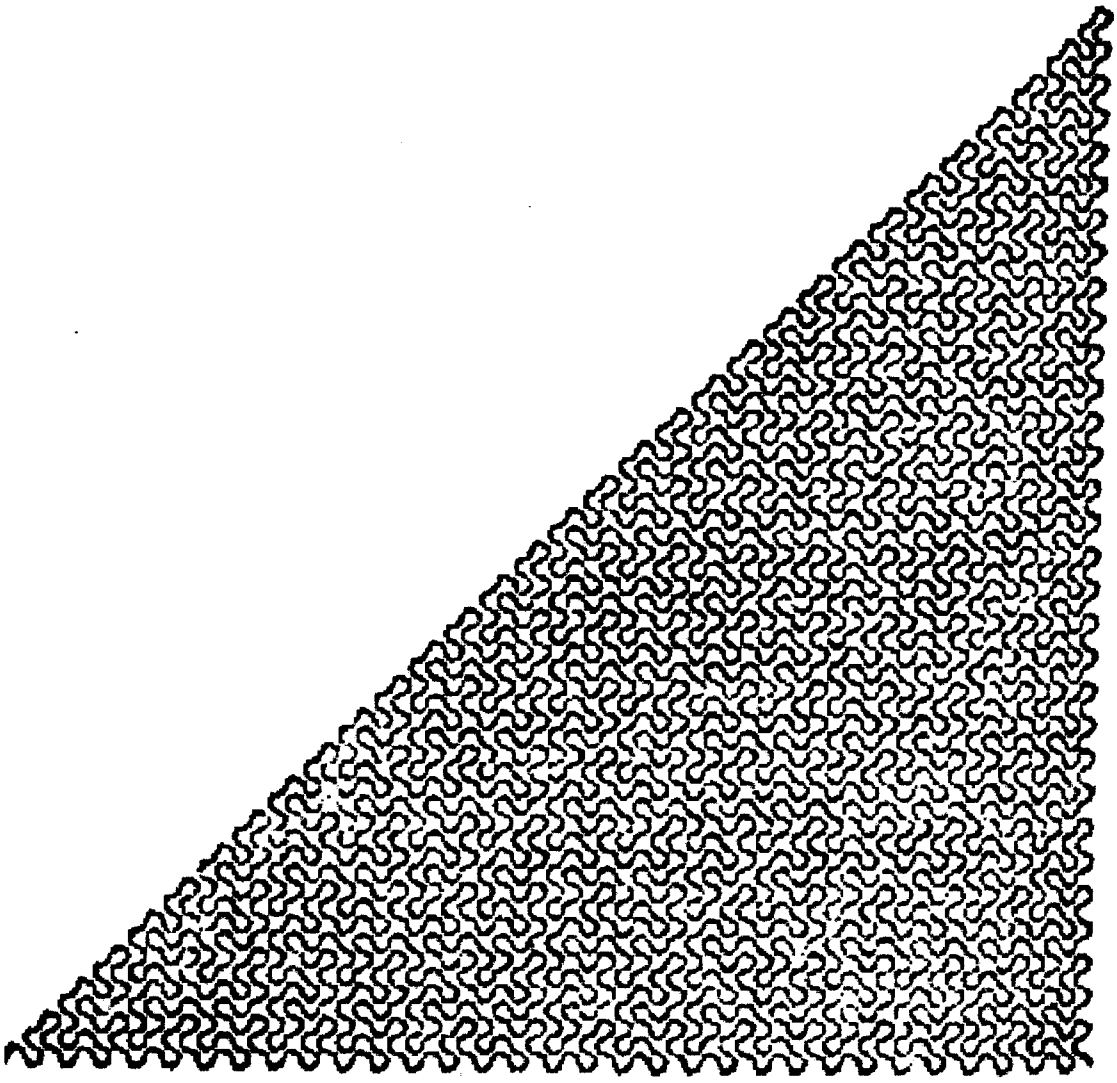


Рис. 12

Получение кривой дракона с помощью геометрического построения

Бенкс придумал способ, позволяющий получать кривые дракона с помощью геометрического построения. Сначала берется отрезок единичной длины. Затем он заменяется на два отрезка, образующих боковые стороны равнобедренного прямоугольного треугольника, для которых исходный отрезок является гипотенузой. В результате отрезок как бы прогибается под прямым углом. Направление прогиба чередуется. Первый отрезок прогибается вправо (по ходу движения слева направо), второй – влево, третий – опять вправо и т.д. Таким образом, после каждого шага число имеющихся отрезков удваивается, а длина каждого соответственно уменьшается в $\sqrt{2}$ раз.

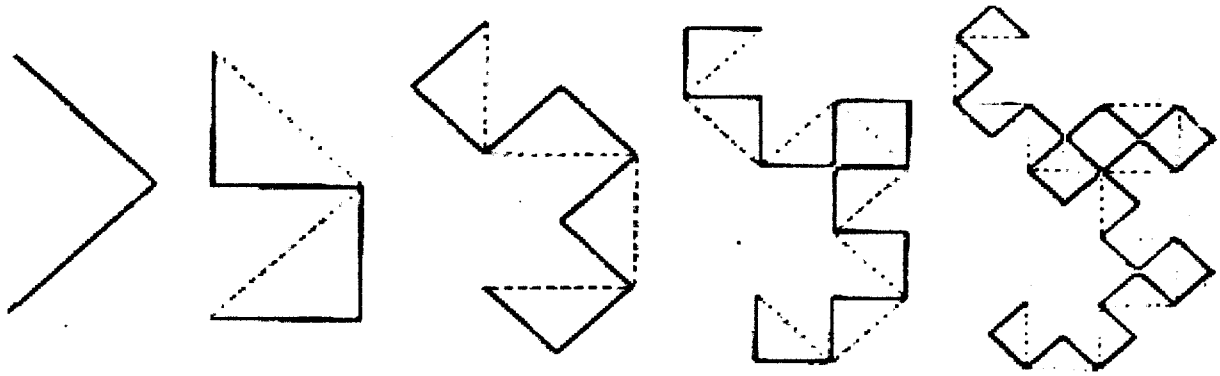


Рис.13

Заключение

Работая с кривыми дракона, мы смогли выполнить поставленную цель и выявленные задачи; также мы попытались решить задачи предложенные «Квантом»: и встретились с незнакомым нам понятием «фрактал». Далее мы собираемся взять эту масштабную тему, также как и линии дракона, не входящую в школьный курс геометрии, для более глубокого изучения.

Литература

1. Васильев Н., Гутенмахер В., Кривые дракона, «Квант» №2, 1970 г.
2. Мартин Гарднер. Математические новеллы. М., "Мир", 1974. - 456 с. Глава 19: "Семь элементарных задач".
3. У.Болл, Э.Коксетер. Математические эссе и развлечения. М.: "Мир", 1986. - 474 с. Глава IX. Задачи об уникурсальных кривых.
4. FractalWorld. Фракталы. Семейство драконов.

Электронные ресурсы

5. http://netnotes.narod.ru/math/dragon.html - Растрепанный Блокнот, Кривая дракона. - 9 января.